

Universidade Federal de Santa Catarina
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção

**ANÁLISE ENVOLTÓRIA DE DADOS: considerações sobre
o estabelecimento de restrições para os multiplicadores
ótimos**

Margit Teresinha Beckenkamp

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de
Produção da Universidade Federal de Santa Catarina como requisito parcial para
obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção

Florianópolis
2002

Universidade Federal de Santa Catarina

Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção

**ANÁLISE ENVOLTÓRIA DE DADOS: considerações sobre
a estabelecimento de restrições para os multiplicadores
ótimos**

Margit Teresinha Beckenkamp

Florianópolis

2002

ANÁLISE ENVOLTÓRIA DE DADOS: considerações sobre o estabelecimento de restrições para os multiplicadores ótimos

Margit Teresinha Beckenkamp

Esta dissertação foi julgada e aprovada para a obtenção do título de **Mestre em Engenharia de Produção** no Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Santa Catarina

Florianópolis, 18 de abril de 2002

Prof. Ricardo Miranda Barcia, PhD.
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Jair dos Santos Lapa, PhD.
Orientador

Prof. Gregório Jean Varvakis Rados, PhD.

Prof. Álvaro Guillermo Rojas Lezana, Dr.

Prof. José Angelo Belloni, Dr.

.....

Aos meus pais

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Jair dos Santos Lapa, pela orientação no desenvolvimento desse trabalho.

Aos membros da Banca Examinadora, pelo tempo que dedicaram à leitura dessa pesquisa e pelos comentários.

Aos meus colegas e amigos Gretel, Guaraci e Marcelo pelo amizade e apoio nesta jornada.

À todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização desse trabalho.

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS	V
SUMÁRIO	VI
LISTA DE FIGURAS.....	VII
LISTA DE TABELAS.....	VIII
LISTA DE SÍMBOLOS	IX
RESUMO.....	XIII
ABSTRACT	XIV
1 INTRODUÇÃO	01
1.1 Tema.....	01
1.2 Objetivo.....	03
1.3 Estrutura do Trabalho.....	03
2 ANÁLISE ENVOLTÓRIA DE DADOS	05
2.1 Produtividade e Eficiência Técnica	06
2.2 O Modelo Seminal de Charnes, Cooper & Rhodes (1978)	08
2.3 Os multiplicadores ótimos.....	12
2.4 O Modelo CCR Básico	14
2.5 O Modelo BCC Básico	18
2.6 O Modelo CCR-DT de Dyson & Thanassoulis (1988)	20
2.7 O Modelo CCR-WB de Wong & Beasley (1990)	23
2.8 O Modelo CCR-ACS de Ali, Cook & Seiford (1991)	27
3 O BANCO DE DADOS DE REFERÊNCIA	34
3.1 A Aplicação do Modelo CCR Básico	37
3.2 A Aplicação do Modelo BCC Seminal	39
3.3 A Aplicação do Modelo BCC Básico	41
4 MODELOS DEA COM LIMITAÇÕES NOS MULTIPLICADORES.....	48
4.1 Aplicação do Modelo DEA-DT de Dyson & Thanassoulis	48
4.2 Aplicação do Modelo DEA-ACS de Ali, Cook & Seiford	56
4.3 Aplicação do Modelo DEA-WB de Wong & Beasley	63
5 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	75
5.1 Conclusões	75
5.2 Recomendações	76
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	77
ANEXO	80

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	O conceito de produtividade de Knight	06
Figura 2.2	O Modelo DEA Seminal	08
Figura 2.3	O Modelo CCR Seminal, orientado para ampliação da produção	10
Figura 2.4	O Modelo CCR Seminal, orientado para contração do consumo.....	10
Figura 2.5	O Modelo CCR Básico	14
Figura 2.6	O Modelo CCR Básico orientado para contração do consumo	15
Figura 2.7	O Modelo CCR Básico orientado para expansão da produção	15
Figura 2.8	Fase I da Solução Computacional do Modelo CCR Básico	17
Figura 2.9	Fase II da Solução Computacional do Modelo CCR Básico	17
Figura 2.10	O Modelo BCC Básico orientado para a contração do consumo.....	19
Figura 2.11	O Modelo BCC Básico orientado para expansão da produção.....	19
Figura 2.12	O Modelo CCR Básico simplificado: um único insumo	21
Figura 2.13	O Modelo CCR-DT de Dyson & Thanassoulis	21
Figura 2.14	Forma dos Multiplicadores e Forma do Envelopamento do Modelo CCR-DT.....	23
Figura 2.15	O Modelo CCR-WB de Wong & Beasley	24
Figura 2.16	O Modelo CCR-WB de Wong & Beasley com limites nos multiplicadores somente para o plano de operação [X^0, Y^0]	25
Figura 2.17	A Forma dos Multiplicadores e a Forma do Envelopamento do Modelo CCR-WB de Wong & Beasley orientado para expansão da produção, com limites nos multiplicadores somente para o plano de operação [X^0, Y^0]	26
Figura 2.18	O Modelo CCR-WB com limites dos multiplicadores associados às quantidades médias dos produtos gerados.....	27
Figura 2.19	A Forma dos Multiplicadores e a Forma do Envelopamento do Modelo CCR-WB com limites dos multiplicadores associados às quantidades médias dos produtos gerados.....	28
Figura 2.20	O Modelo CCR-ACS de Ali, Cook & Seiford com relação forte de “ <i>taxas de troca</i> ” de produtos	29
Figura 2.21	O Modelo CCR-ACS de Ali, Cook & Seiford com relação fraca de “ <i>taxas de troca</i> ” de produtos.....	29

Figura 2.22 A Forma dos Multiplicadores e a Forma do Envelopamento do Modelo CCR-ACS, com orientação para expansão da produção e com relações ordinais fortes para “taxas de troca”	31
Figura 2.23 A Forma dos Multiplicadores e a Forma do Envelopamento do Modelo CCR-ACS Modificado, orientado para expansão da produção e com relações ordinais fortes para “taxas de troca”	31
Figura 2.24 A Forma dos Multiplicadores e a Forma do Envelopamento do Modelo CCR-ACS, com orientação para expansão da produção e com relações ordinais fracas para as “taxas de troca”	32
Figura 2.25 A Forma dos Multiplicadores e a Forma do Envelopamento do Modelo CCR-ACS Modificado, com orientação para expansão da produção e com relação ordinal fracas para “taxas de troca”	32
Figura 3.1 Porte das 33 Instituições de Ensino Superior do Banco de Referência	36
Figura 3.2 Modelo BCC Básico – Fronteira de Produção Empírica.....	45
Figura 4.1 Forma do Envelopamento do Modelo BCC-DT	49
Figura 4.2 Modelo DEA de Dyson & Thanassoulis: Fronteira de Produção Empírica	54
Figura 4.3 Forma do Envelopamento do Modelo BCC-ACS.....	57
Figura 4.4 Modelo DEA de Ali, Cook & Seiford: Fronteira de Produção Empírica.....	62
Figura 4.5 Forma do Envelopamento do Modelo BCC-WB	65
Figura 4.6 Modelo DEA de Wong & Beasley: Fronteira de Produção Empírica.....	70

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1	Banco de Dados de Referência	35
Tabela 3.2	Modelo CCR Básico: Medida de Ineficiência e Multiplicadores Ótimos	38
Tabela 3.3	Modelo BCC Seminal: Medida de Ineficiência, Indicador de Retorno de Escala; Multiplicadores Ótimos e Excessos de produtos.....	40
Tabela 3.4	Modelo BCC Básico: Medida de Ineficiência, Indicador de Retorno de Escala; Multiplicadores Ótimos e Excessos de Produtos	42
Tabela 3.5	Modelo BCC Básico: DMUs de Referência; Consumos Mínimos e Taxas de Troca entre Produtos	43
Tabela 3.6	Modelo BCC Básico: Planos de Operação Observados e Metas Eficientes	44
Tabela 4.1	Modelo de Dyson & Thanassoulis: Medida de Ineficiência, Indicador de Retorno de Escala; Multiplicadores Ótimos e Excessos de Produtos.....	51
Tabela 4.2	Modelo de Dyson & Thanassoulis: DMUs de Referência; Consumos Mínimos e Taxas de Troca entre Produtos	52
Tabela 4.3	Modelo Dyson & Thanassoulis : Planos de Operação observados e Metas Eficientes	53
Tabela 4.4	Modelo Ali, Cook & Seiford: Medida de Ineficiência, Indicador de Retorno de Escala; Multiplicadores Ótimos e Excessos de Produtos.....	59
Tabela 4.5	Modelo de Ali, Cook & Seiford: DMUs de Referência; Consumos Mínimos e Taxas de Troca entre Produtos	60
Tabela 4.6	Modelo Ali, Cook & Seiford: Planos de Operação Observados e Metas Eficientes	61
Tabela 4.7	Modelo BCC-Básico – cálculo para limites do Modelo BCC-WB	64
Tabela 4.8	Modelo Wong & Beasley: Medidas de Ineficiência, Indicador de Retorno de Escala, Multiplicadores Ótimos e Excessos de Produtos.....	66
Tabela 4.9	Modelo de Wong & Beasley: DMUs de Referência, Consumos Mínimos e Taxas de Troca entre Produtos	67
Tabela 4.10	Modelo Wong & Beasley: Planos de Operação Observados e Metas Eficientes	68
Tabela 4.11	Proporções dos produtos nos limites impostos no Modelo Wong & Beasley	69
Tabela 4.12	Síntese das características das Fronteiras de Produção Empíricas construídas com o Modelo BCC Básico e os Modelos de Dyson & Thanassoulis, Ali Cook & Seiford e Wong & Beasley.....	73

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos itálicos

B_0 - indicador de eficiência técnica da DMU⁰ no modelo básico orientado para expansão de produção

C_o - indicador de eficiência técnica da DMU⁰ no modelo básico orientado para redução de consumo

E^* - indicador de eficiência técnica da DMU⁰ no modelo básico orientado para redução de consumo

F^* - indicador de eficiência técnica da DMU⁰ no modelo básico orientado para expansão de produção

h_0 - indicador de eficiência técnica da DMU⁰ no modelo seminal orientado para redução de consumo

H_0 - indicador de eficiência técnica da DMU⁰ no modelo seminal orientado para expansão de produção

I - número de insumos relevantes

lP_p - limite inferior do valor que um multiplicador do produto p pode assumir

LP_p - limite superior do valor que um multiplicador do produto p pode assumir

lI_i - limite inferior do valor que um multiplicador do insumo i pode assumir

LI_i - limite superior do valor que um multiplicador insumo i pode assumir

n_i - folga insumo

n_p - folga produto

N - número de planos de operação observados

P - número de produtos relevantes

PR - produtividade

r_i - folga insumo

r_p - folga produto

s^+ - vetor de folgas na geração de produtos

s^- - vetor de excessos no consumo de insumos

x_{in} - quantidade consumida do insumo i pela DMU n

X - vetor que expressa as quantidades consumidas x_i dos I insumos

$[X, Y]$ - plano de operação

y_{pn} - quantidade gerada do produto p pela DMU n

Y - vetor que expressa as quantidades geradas y_p dos P produtos

w_i - folga insumo

z_n - intensidade aplicada ao plano de operação (X_n, Y_n)

Símbolos gregos

ϵ - número não arquimediato positivo

I^* - indicador de eficiência técnica da DMU⁰ no modelo seminal orientado para expansão de produção

I - expansão (equiproporcional) máxima possível do vetor de produtos Y^0 ,
mantendo-se constante o vetor de insumos observados X^0 .

q^* - indicador de eficiência técnica da DMU⁰ no modelo seminal orientado para redução de consumo

q - contração (equiproporcional) máxima possível do vetor de insumos X^0 ,
mantendo-se constante o vetor de resultados observados Y^0 .

m_p - multiplicador do produto p na composição do produto virtual

m_F multiplicador da variável FORMADOS

m_A multiplicador da variável ARTIGOS

m_Q multiplicador da variável IQGRAD

n_{PR} multiplicador da variável PROFESSORES

n_i multiplicador do insumo i na composição do insumo virtual

ANÁLISE ENVOLTÓRIA DE DADOS: considerações sobre o estabelecimento de restrições para os multiplicadores ótimos

RESUMO

Em planos de operação eficientes, as taxas de substituição entre insumos e as taxas de troca entre produtos são compatíveis com as características culturais, sociais e geográficas dos contextos produtivos nos quais foram tomadas as decisões de executar os planos de operação observados. Os modelos DEA tradicionais não consideram tais características e podem levar a avaliações incorretas e ao estabelecimento de metas inviáveis. Esta dissertação aborda esse problema e apresenta três modelos DEA que impõem restrições elementares a essas taxas. A literatura apresenta duas formas para limitar os multiplicadores DEA associados a tais taxas: uma impõe restrições diretamente sobre os multiplicadores enquanto que a outra impõe limites indiretamente. Da primeira forma são abordados os Modelos DEA de Dyson & Thanassoulis e o Modelo de Ali, Cook & Seiford; da segunda, o Modelo de Wong & Beasley. Esses três modelos foram ilustrados com uma aplicação a um mesmo bando de dados, tendo como referência comparativa os resultados do Modelo BCC Básico. Esse exemplo confirma que se deve ter muito cuidado ao classificar um plano de operação observado como eficiente, particularmente quando as taxas de substituição e de troca determinadas pelos Modelos DEA não são compatíveis com as características culturais, sociais e geográficas do contexto produtivo associado à tomada de decisão e reforça a necessidade de limites serem impostos aos multiplicadores dos Modelos DEA.

Palavras-Chave: Análise Envoltória de Dados;
Limites dos Multiplicadores;
Avaliação de Desempenho.

DATA ENVELOPMENT ANALYSIS: considerations on the establishment of restrictions to the optimal multipliers

ABSTRACT

In efficient operation plans, the rates of input substitution and of output exchange are compatible with the cultural, social and geographical characteristics of the productive contexts in which decisions were taken to execute the observed operation plans. The traditional DEA Models do not consider such characteristics and may lead to incorrect evaluations and to the establishment of unfeasible goals. This dissertation deals with this problem and presents three DEA Models that impose basic restrictions to these rates. The literature presents two ways to limit the DEA multipliers associated to such rates: one imposes restrictions directly over the multipliers while the other does it indirectly. “Dyson & Thanassoulis” and “Ali, Cook & Seiford” are models of the first type of restrictions, “Wong & Beasley” is model of the second type. These three Models are discussed and illustrated with an application, to the same Data Base, that employ the BCC Basic Model results for comparative reference. The results reinforce that special care should be taken when classifying an operation plan considered as efficient and to use it as a reference in establishing alternative goals for inefficient organization, particularly, when the substitution and exchanges rates determined by the DEA Models are incompatible with the cultural, social, and geographical characteristics of the productive context associated with the decision making. This reinforces the need for limitations to be imposed on DEA Model multipliers.

Keywords: Data Envelopment Analysis;
Restriction of multipliers;
Evaluation of performance.

1 INTRODUÇÃO

1.1 Tema

Neste limiar do século XXI, a gestão pública está centrada na responsabilidade social das organizações, na transparência democrática da aplicação dos recursos públicos e na eficiência econômica das atividades governamentais.

Organizações sociais, como hospitais e escolas, operam em contextos produtivos que são cultural, social e geograficamente diferentes. Esse fato faz com que planos de operação produtivamente eficientes¹ para algumas dessas organizações apresentem-se como ineficientes ou até mesmo como inviáveis para outras, quer por restrições de ordem operacional, quer por diferenças nos valores relativos que os gestores atribuem aos insumos e aos produtos.

Grandes esforços têm sido dedicados ao estudo de formas de mensurar e fazer análises da eficiência de empresas privadas e de instituições públicas. Desde a década de cinquenta, a partir dos trabalhos de Koopmans (1951), Farrel (1957) e Debreu (1951), técnicas não-paramétricas vêm sendo utilizadas para avaliar se um plano de operação é eficiente. Mas foi a partir da década de setenta que houve grande progresso na aplicação dessas técnicas, visto que, sob o prisma gerencial, os seus resultados revelaram-se mais expressivos que aqueles obtidos através da abordagem paramétrica tradicional.

Análise Envoltória de Dados – DEA² é uma técnica não-paramétrica que emprega programação matemática para construir fronteiras de produção de unidades produtivas – DMUs³ que empregam processos tecnológicos semelhantes para transformar múltiplos insumos em múltiplos produtos. Tais fronteiras são

¹ Planos de operação são relações que associam quantidades de insumos a quantidades de produtos. Um plano de operação é viável quando as quantidades de produtos podem ser geradas com as quantidades de insumos. O conjunto de todos os planos de operação viáveis é chamado de tecnologia produtiva. Para facilidade de exposição e simplificação do texto, o adjetivo “produtiva” não será apostado ao substantivo “tecnologia”; assim, nesta dissertação, o termo “tecnologia” sempre terá o significado de “tecnologia produtiva”. O conceito de eficiência está discutido detalhadamente no Capítulo I.

² De *Data Envelopment Analysis*, como empregado na literatura internacional.

³ De *Decision Making Unit*, como usado na literatura internacional.

empregadas para avaliar a eficiência relativa dos planos de operação executados pelas DMUs e servem, também, como referência para o estabelecimento de metas eficientes para cada unidade produtiva.

DEA foi desenvolvida para avaliar a eficiência de organizações cujas atividades não visam lucros ou para as quais não existem preços pré-fixados para todos os insumos e/ou todos os produtos. A inexistência de tais preços dificulta a identificação das “*taxas de substituição*” entre insumos e das “*taxas de troca*” entre produtos associadas às decisões tomadas de executar os planos de operação observados. Todavia, tais multiplicadores⁴ existem e foram considerados pelos tomadores de decisão quando optaram por executar os planos de operação observados. Porém, é de esperar que as “*taxas de substituição*” e as “*taxas de troca*” não sejam, necessariamente, as mesmas para todas as DMUs.

Essa possibilidade de diferenciação dos multiplicadores é levada em conta pela DEA, uma vez que essa técnica identifica os multiplicadores mais adequados para caracterizar, como eficientes, os planos de operação observados. Porém, tal possibilidade não deve permitir uma escolha totalmente livre, pois os multiplicadores devem ser compatíveis com as características culturais, sociais e geográficas dos contextos produtivos nos quais foram tomadas as decisões de executar os planos de operação observados. Portanto, é necessário permitir o estabelecimento de alguma forma de controle na identificação dos multiplicadores associados a cada plano observado.

A literatura apresenta duas formas para limitar os multiplicadores: uma impõe restrições diretamente sobre os multiplicadores enquanto que a outra impõe limites, indiretamente, estabelecendo restrições à participação de cada produto ou de cada

⁴ O termo “multiplicadores” será empregado para designar indistintamente as taxas de substituição entre insumos e as taxas de troca entre produtos, tendo-se sempre em mente que, na realidade, a proporção entre tais “multiplicadores” é que corresponde à proporção entre os inversos das taxas de substituição de insumos e das taxas de troca entre produtos.

insumo no plano de operação a ser executado⁵.

1.2 Objetivo

Não tendo sido encontrado na literatura brasileira um trabalho que discuta e ilustre diferentes modos de estabelecer tais limites⁶, elaborou-se esta dissertação que descreve os três modos mais elementares que têm sido empregados para tal fim, ilustrando-os com uma avaliação da eficiência de universidades federais brasileiras.

A dissertação descreve e aplica ao banco de dados de Belloni (2000) os modelos elementares desenvolvidos por:

- Dyson & Thanassoulis (1988), que considera um único insumo e que estabelece limites para as taxas de troca entre produtos, tendo em vista a necessidade de ser consumida uma quantidade mínima do insumo para cada unidade de produto gerado;
- Wong & Beasley (1990), que estabelece limites para a proporção entre o valor virtual individual de cada produto (insumo) e o valor virtual global da produção (consumo); e,
- Ali, Cook & Seiford (1991), que estabelece ordenamentos para as taxas de substituição dos insumos e as taxas de trocas entre os produtos.

1.3 Estrutura do trabalho

Esta Introdução e mais quatro Capítulos compõem este documento. O Capítulo 1 apresenta a Introdução com o tema, os respectivos objetivos e a estruturação do

⁵ Os multiplicadores podem ser interpretados como “preços virtuais” associados aos insumos e produtos. Assim, a produção teria um valor virtual global que corresponderia à soma dos valores virtuais individuais de todos os produtos, isto é, à soma das quantidades geradas dos produtos multiplicadas pelos respectivos preços virtuais relativos. Limites são colocados na proporção entre o valor virtual individual de cada produto e o valor virtual global da produção. Mutatis mutandis, limites são também fixados para as proporções entre o valor virtual individual de cada insumo e o valor virtual global do consumo.

⁶ Lins & Angulo Meza (2.000) descreve diversos modos de estabelecer tais limites. Todavia, nesse livro, a discussão é focalizada no estabelecimento de metas eficientes e não na adequação dos multiplicadores aos contextos produtivos.

presente estudo. O segundo Capítulo, além de descrever os modelos de Dyson & Thanassoulis, de Wong & Beasley e de Ali, Cook & Seiford, também apresenta os três modelos DEA tradicionais, a saber: o CCR Seminal e o CCR Básico, desenvolvidos por Charnes, Cooper & Rhodes (1978, 1979) e o BCC Básico, desenvolvido por Banker, Charnes & Cooper (1984). O Capítulo 3 trata do banco de dados de Belloni (2000) e apresenta os resultados da aplicação dos três modelos tradicionais a esse banco. No Capítulo 4, os resultados da aplicação àquele banco de dados nos modelos de Dyson & Thanassoulis (1988), de Wong Beasley (1990) e de Ali, Cook & Seiford (1991) são analisados e comparados com os resultados do modelo BCC Básico. O último Capítulo apresenta conclusões e recomendações.

2 ANÁLISE ENVOLTÓRIA DE DADOS

Faz-se breve revisão dessa técnica dando-se especial destaque ao estabelecimento de restrições para os multiplicadores associados às “taxas de substituição” e às “taxas de troca” que caracterizam planos de operação eficientes.

Inicialmente apresenta-se o conceito de produtividade de Knight com vistas a introduzir a noção de tais multiplicadores. Descreve-se, a seguir, o modelo CCR Seminal, desenvolvido por Charnes, Cooper & Rhodes (1978), que avalia a eficiência técnica de um plano de operação executado, na hipótese da tecnologia exibir retornos de escala constantes e descarte livre de insumos e de produtos. Nesse modelo, a eficiência técnica do plano de operação executado é avaliada comparando a sua produtividade com a produtividade dos demais planos da tecnologia. A única restrição imposta sobre os multiplicadores é deles não serem negativos.

Existem várias extensões do modelo CCR Seminal. Muitas delas tratam do estabelecimento de restrições para os multiplicadores. Duas são básicas. Uma, de Charnes, Cooper & Rhodes (1979), que corresponde ao modelo CCR Básico e limita os multiplicadores a valores positivos. A outra, de Banker, Charnes & Cooper (1984), que corresponde ao modelo BCC Básico e impõe restrições para os multiplicadores de modo à tecnologia exibir retornos de escala variáveis. Há três extensões que retratam modos elementares de estabelecer restrições para os multiplicadores. São os modelos de Dyson & Thanassoulis - DT, de Wong & Beasley - WB e de Ali, Cook & Seiford - ACS, já mencionados na Introdução e que são o objeto desta dissertação. Este Capítulo trata desses modelos DEA.

A literatura recente é rica em documentos sobre Análise Envoltória de Dados. Seiford (1994) e o site www.deazone.com/bibliography apresentam extensas bibliografias sobre essa técnica. Sobre a teoria e suas aplicações, merecem referência especial Fare, Grosskopf & Knox Lovell (1994), Fried, Lovell & Schmidt, edt, (1993) e Charnes, Cooper, Lewin & Seiford, edt, (1993). Sobre o estabelecimento de limites para os multiplicadores, destaca-se Pedraja-Chaparro, Salinas-Jimenez & Smith (1997).

2.1 Produtividade e Eficiência Técnica

Quando um único insumo é usado para gerar um único produto, a produtividade do plano de operação observado $[x; y]$ é computada pela razão $PR = y/x$, onde x é a quantidade consumida do insumo e y é a quantidade gerada do produto.

Todavia, a quase totalidade das organizações⁷ usa vários insumos para gerar vários produtos. Nesse contexto, a produtividade PR costuma ser avaliada computando a razão entre as quantidades dos produtos gerados agregadas em um único produto virtual e as quantidades dos insumos consumidos agregadas em um único insumo virtual. Nesse caso, uma das formas mais tradicionais de computar a produtividade PR é empregando o conceito de Knight (apud Fried, Lovell, Schmidt, ed., 1993, pág. 04) descrito na Figura 2.1, na qual os multiplicadores $m_p > 0$, para $p=1, \dots, P$, e $n_i > 0$, para $i=1, \dots, I$, refletem, respectivamente, as utilidades dos P produtos gerados e dos I insumos consumidos, e as variáveis $y_p \geq 0$ e $x_i \geq 0$ expressam as respectivas quantidades dos produtos gerados e dos insumos consumidos.

$$PR = \frac{\sum_{p=1}^P m_p y_p}{\sum_{i=1}^I n_i x_i}$$

$y_p \geq 0$ quantidade gerada do produto p $\sum y_p > 0$
 $x_i \geq 0$ quantidade consumida do insumo i $\sum x_i > 0$
 $m_p > 0$ utilidade do produto p na composição do produto virtual
 $n_i > 0$ utilidade do insumo i na composição do insumo virtual

Figura 2.1 O Conceito de Produtividade de Knight

Para o cálculo da produtividade PR , Knight propõe que os preços de mercado sejam empregados para representar as utilidades relativas entre os produtos e os insumos relevantes para a DMU que executou o plano de operação. Todavia, em

⁷ Empresa com finalidade lucrativa ou instituição sem finalidade lucrativa.

grande número de casos, não existem preços de mercado de todos os produtos e insumos relevantes, não sendo possível, em consequência, seguir a proposta de Knight para calcular a produtividade PR , nem mesmo para verificar se a produtividade da organização pode ser aumentada.

Uma das abordagens mais recentes para contornar essa dificuldade é empregar Análise Envoltória de Dados. Essa técnica identifica taxas de substituição de insumos e taxas de troca entre produtos que caracterizam planos de operação eficientes, permitindo verificar se a DMU está operando ineficientemente, bem como possibilitando identificar planos de operação eficientes que sejam alternativas produtivas para ela.

Considere o plano de operação $[X^0, Y^0]$ executado pela DMU⁰, onde o vetor X^0 expressa as quantidades consumidas x_{i0} dos I insumos relevantes e o vetor Y^0 expressa as quantidades geradas y_{p0} dos P produtos relevantes⁸. Diz-se que esse plano é eficiente tecnicamente, segundo o conceito de Koopmans (1951), quando a organização: (i) não puder aumentar a geração de qualquer produto, sem diminuir a geração de outro produto ou aumentar o consumo de pelo menos um insumo, (ii) nem puder diminuir o consumo de qualquer insumo, sem aumentar o consumo de outro insumo ou diminuir a geração de pelo menos um produto. Isto é, quando não existir plano de operação viável $[X, Y]^9 \neq [X^0, Y^0]$, tal que $X \leq X^0$ ou $Y \geq Y^0$. Na prática é muito difícil verificar se um plano de operação é eficiente segundo a concepção de Koopmans. Para contornar essa dificuldade, Farrell (1957) relaxou o conceito de eficiência de Koopmans considerando que:

- **O plano de operação $[X^0, Y^0]$ é eficiente na produção**, quando a DMU⁰ não tiver condições técnicas de aumentar equiporcionalmente as

⁸ Para facilitar a exposição e simplificar o texto, o adjetivo “relevante” não mais será apostro aos substantivos “insumo” e “produto”; assim, a partir desta página, o termo “insumo” (“produto”) sempre terá o significado de “insumo relevante” (“produto relevante”).

⁹ Um plano de operação genérico $[X, Y]$ é um par de vetores, no qual o vetor $X = \{x_i\}$ relaciona as quantidades $x_i \geq 0$ ($i=1, 2, \dots, I$) dos insumos consumidos e o vetor $Y = \{y_p\}$ relaciona as quantidades $y_p \geq 0$ ($p=1, 2, \dots, P$) dos produtos gerados.

quantidades geradas dos produtos e continuar consumindo as mesmas quantidades de insumos X^0 . Isto é, quando não existir plano de operação viável $[X, Y]$ tal que $X = X^0$ e $Y = k \cdot Y^0$, com $k > 1$.

- **O plano de operação $[X^0, Y^0]$ é eficiente no consumo**, quando a DMU^0 não tiver condições técnicas de reduzir equiproporcionalmente as quantidades consumidas dos insumos e continuar gerando as mesmas quantidades de produtos Y^0 . Isto é, quando não existir plano de operação viável $[X, Y]$ tal que $X = k \cdot X^0$ e $Y = Y^0$, com $0 < k < 1$.

2.2 O Modelo Seminal de Charnes, Cooper e Rhodes (1978)

Esses autores, com a finalidade de avaliar a eficácia do Program Follow Through, programa do governo americano para melhorar o desempenho escolar de crianças de classes sociais menos favorecidas, desenvolveram o Modelo DEA Seminal, cuja formulação matemática encontra-se na Figura 2.2.

$$\begin{aligned}
 \Omega_0 = \max_{m_p, n_i} & \frac{\sum_{p=1}^P m_p y_{p0}}{\sum_{i=1}^I n_i x_{i0}} && \text{sujeito a} \\
 \frac{\sum_{p=1}^P m_p y_{pn}}{\sum_{i=1}^I n_i x_{in}} & \leq 1; && n = 1, \dots, N \\
 n_i & \geq 0; && i = 1, \dots, I \\
 m_p & \geq 0; && p = 1, \dots, P
 \end{aligned}$$

Figura 2.2 O Modelo DEA Seminal

Tal modelo avalia a eficiência técnica do plano de operação observado $[X^0, Y^0]$ em uma tecnologia linear por partes que exhibe retornos constantes à escala e descarte livre de insumos e produtos, construída a partir dos planos observados

$[X^n, Y^n]$, $n = 1, 2, \dots, N$ ¹⁰. Essa eficiência é avaliada escolhendo-se multiplicadores m_p e n_i que maximizem a produtividade desse plano (computada como a razão do produto virtual $\sum m_p y_{p0}$ com o insumo virtual $\sum n_i x_{i0}$)¹¹ comparativamente às N produtividades dos planos de operação observados (calculadas como a razão entre o produto e o insumo virtuais associados a cada um dos N planos de operação observados¹²), quando computadas com os mesmos multiplicadores m_p e n_i . É exigido que tais razões sejam menores ou iguais a 1 de modo a assegurar a determinação do problema de maximização descrito na Figura 2.2.

O Modelo DEA Seminal é um problema de programação matemática fracional que pode ser transformado em dois problemas alternativos de programação linear diferentes (Charnes e Cooper, 1962). Um deles, como descrito na Figura 2.3, minimiza o insumo virtual $\sum n_i x_{i0}$, mantendo constante o produto virtual $\sum m_p y_{p0}$; o outro, como exposto na Figura 2.4, maximiza o produto virtual $\sum m_p y_{p0}$, mantendo constante o insumo virtual $\sum n_i x_{i0}$. Nesses dois problemas, as variáveis duais z_n , para $n = 1, 2, \dots, N$, que caracterizam a Forma do Envelopamento, podem ser interpretadas como sendo as intensidades a serem aplicadas aos planos de operação observados $[X^n, Y^n]$ na construção de planos de operação viáveis $[X, Y]$, definidos como combinações lineares dos N planos de operação observados e que formam a tecnologia linear por partes construída para avaliar a eficiência do plano $[X^0, Y^0]$.

¹⁰ Fare, Grosskopf & Knox Lovell (1994) descrevem detalhadamente como essa tecnologia pode ser construída. Uma tecnologia exibe retornos de escala constantes quando também for viável qualquer expansão ou redução equiproporcional de todo plano de operação viável. Uma tecnologia exibe descarte livre de insumos e produtos quando, para todo plano viável $[X^0, Y^0]$, também for viável qualquer plano $[X, Y]$ tal que $X \geq X^0$ e $Y \leq Y^0$.

¹¹ Para simplificar o texto, os limites da somatória \sum serão omitidos sempre que não causar interpretação dúbia.

FORMA DOS MULTIPLICADORES	FORMA DO ENVELOPAMENTO
$H_0 = \min \sum \mathbf{n}_i x_{i0}$	$I^* = \max I$
<i>sujeito a</i>	<i>sujeito a</i>
$\sum \mathbf{m}_p y_{p0} = 1$	$I y_{p0} - \sum y_{pn} z_n \leq 0, \quad p = 1, \dots, P$
$\sum \mathbf{n}_i x_{in} - \sum \mathbf{m}_p y_{pn} \geq 0, \quad n = 1, \dots, N$	$\sum x_{in} z_n \leq x_{i0}, \quad i = 1, \dots, I$
$\mathbf{m}_p \geq 0, \quad p = 1, \dots, P$	$I \in R,$
$\mathbf{n}_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, I$	$z_n \geq 0, \quad n = 1, \dots, N$

Figura 2.3 O Modelo CCR Seminal, orientado para ampliação da produção

FORMA DOS MULTIPLICADORES	FORMA DO ENVELOPAMENTO
$h_0 = \max \sum \mathbf{m}_p y_{p0}$	$q^* = \min q$
<i>sujeito a</i>	<i>sujeito a</i>
$\sum \mathbf{n}_i x_{i0} = 1$	$\sum y_{pn} z_n \geq y_{p0}, \quad p = 1, \dots, P$
$-\sum \mathbf{n}_i x_{in} + \sum \mathbf{m}_p y_{pn} \leq 0, \quad n = 1, \dots, N$	$q x_{i0} - \sum x_{in} z_n \geq 0, \quad i = 1, \dots, I$
$\mathbf{m}_p \geq 0, \quad p = 1, \dots, P$	$q \in R;$
$\mathbf{n}_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, I$	$z_n \geq 0, \quad n = 1, \dots, N$

Figura 2.4 O Modelo CCR Seminal, orientado para contração do consumo

¹² $[X^0, Y^0]$ inclui-se nos N planos de operação observados, para facilidade operacional do Modelo DEA Seminal.

Os indicadores de ineficiência q^* e I^* são adimensionais e, portanto, independem das unidades de medidas dos insumos e produtos. O valor ótimo q^* reflete a maior contração¹³ possível do consumo X^0 capaz de gerar a produção observada Y^0 . Quando $q^* = 1$, não existe contração do consumo X^0 capaz de gerar Y^0 ; portanto, o plano $[X^0, Y^0]$ é eficiente segundo Farrell. Quando $q^* < 1$, então o plano $[X^0, Y^0]$ é ineficiente e o escalar q^* é um indicador dessa ineficiência, pois o consumo pode ser contraído de X^0 para $q^* \cdot X^0$ sem reduzir as quantidades geradas dos produtos, isto é, mantendo-se a produção igual a Y^0 . De maneira análoga, o valor ótimo I^* reflete a maior ampliação¹⁴ possível da produção Y^0 gerável com o consumo observado X^0 . Quando $I^* = 1$, não é possível ampliar a produção observada Y^0 sem aumentar o consumo observado X^0 ; portanto o plano $[X^0, Y^0]$ é eficiente segundo Farrell. Quando $I^* > 1$, então o plano $[X^0, Y^0]$ é ineficiente e o escalar I^* é um indicador dessa ineficiência, pois a produção pode ser ampliada de Y^0 para $I^* Y^0$ sem a necessidade de aumentar as quantidades consumidas dos insumos, isto é, mantendo-se o consumo igual a X^0 .

Assim, tanto q^* como I^* são indicadores de eficiência Farrell e, conseqüentemente, os modelos DEA Seminal e CCR Seminal avaliam se o plano de operação observado $[X^0, Y^0]$ é eficiente segundo o conceito de Farrell. Por conseguinte, a meta $[X^*, Y^*] = [q^* X^0, Y^0]$ é uma meta eficiente (Farrell) que pode ser estabelecida para a DMU⁰, quando se deseja contrair o consumo, e $[X^*, Y^*] = [X^0, I^* Y^0]$ uma meta eficiente quando se deseja ampliar a produção. Porém, é possível que um plano de operação, avaliado como eficiente por esses modelos, tenha ainda folga reduzível de algum insumo ou excesso gerável de algum produto¹⁵, fato que caracterizaria ineficiência segundo Koopmans.

¹³ Contração significa redução equiproporcional.

¹⁴ Ampliação significa expansão equiproporcional.

¹⁵ De alguns, mas não de todos.

2.3 Os Multiplicadores Ótimos

Os multiplicadores \mathbf{m}_p^* e \mathbf{n}_i^* ótimos calculados pelo Modelo CCR Seminal orientado para contração do consumo determinam para o plano $[X^0, Y^0]$ seu indicador de eficiência técnica empírica $h_0 = \mathbf{q}^*$, que expressa a razão entre a produtividade do plano $[X^0, Y^0]$ e a máxima produtividade observada nos N planos de operação observados $[X^n, Y^n]$, quando todas as produtividades são medidas com os mesmos \mathbf{m}_p^* e \mathbf{n}_i^* . Como tais multiplicadores são escolhidos de modo a maximizar a produtividade relativa de $[X^0, Y^0]$, então \mathbf{m}_p^* e \mathbf{n}_i^* refletem as “taxas de troca” entre produtos e “taxas de substituição” entre insumos mais favoráveis para a DMU⁰. Ademais, para outros multiplicadores, a produtividade relativa de $[X^0, Y^0]$ não aumenta comparativamente à produtividade máxima observada nos N planos de operação observados, quando computadas com tais multiplicadores, quaisquer que sejam eles (desde que não-negativos). Portanto, os multiplicadores ótimos \mathbf{m}_p^* e \mathbf{n}_i^* refletem as utilidades relativas mais apropriadas para justificar a decisão da DMU⁰ ter empregado X^0 para gerar Y^0 . Raciocínio semelhante aplica-se, mutatis mutandis, ao Modelo CCR Seminal orientado para ampliação da produção.

Essa flexibilidade na escolha dos multiplicadores \mathbf{m}_p e \mathbf{n}_i é uma das principais características da Análise Envoltória de Dados. Todavia, no modelo CCR Seminal, essa flexibilidade é excessiva, visto que ela pode levar à escolha de multiplicadores economicamente não condizentes com a realidade, visto que eles refletem “taxas de troca” e “taxas de substituição”. Por exemplo, $\mathbf{m}_p^* = 0$ (ou $\mathbf{n}_i^* = 0$) indica que o produto p (insumo i) não tem utilidade para a DMU⁰, pois a produtividade de todo plano de operação viável fica inalterada qualquer que seja a quantidade desse produto (insumo). Por conseguinte, esse produto (insumo) não seria relevante para essa DMU⁰, contrariando a hipótese de, no Modelo CCR Seminal, todos os produtos (insumos) serem relevantes.

Há duas restrições básicas tradicionalmente impostas ao Modelo CCR Seminal. A primeira exige que todos os multiplicadores sejam positivos, visto que todos os produtos e insumos considerados na Análise Envoltória de Dados devem ser relevantes para a DMU⁰. Nessa direção, Charnes, Cooper & Rhodes (1979) elaboraram o Modelo CCR Básico. A segunda restrição estabelece limites para os multiplicadores de modo à tecnologia exibir retornos de escala variáveis¹⁶. Com essa finalidade, Banker, Charnes & Cooper (1984) propuseram o Modelo BCC Básico.

A validação dos resultados da aplicação da Análise Envoltória de Dados depende da adequação dos multiplicadores ao contexto ambiental da DMU⁰. Nesse sentido, pode ser necessário limitar ainda mais a flexibilidade dos multiplicadores m_j e n_i a serem calculados pelos modelos DEA. Dois são os enfoques mais freqüentemente encontrados na literatura. O primeiro impõe restrições diretamente em cada multiplicador, atribuindo limites inferior l_i e superior u_i para o multiplicador n_i e limites inferior l_p e superior u_p para o multiplicador m_j ; também podem ser atribuídos, nesse enfoque, limites inferior e superior para a razão entre dois multiplicadores de insumos ou entre dois multiplicadores de produtos. As principais dificuldades desse primeiro enfoque residem na definição de tais limites e na possibilidade de os limites estabelecidos tornarem inviável a busca de uma solução do modelo DEA construído. Dois Modelos são elementares nesse enfoque: o de Dyson & Thanassoulis (1988) e de Ali, Cook & Seiford (1991). No segundo enfoque são impostas restrições à participação do produto p (do insumo i) na produção gerada (no consumo realizado). A forma mais elementar para estabelecer os limites preconizados nesse enfoque encontra-se no modelo de Wong & Beasley (1990). O estabelecimento desses limites também é a principal dificuldade desse segundo enfoque.

De um modo geral, os limites dos multiplicadores ótimos são estipulados via um processo de consenso de especialistas. Todavia, tendo em vista esse processo ser muito caro, costuma-se empregar, nas etapas iniciais e exploratórias de estudos DEA, os resultados empíricos da aplicação dos Modelos CCR e BCC Básicos.

¹⁶ Uma tecnologia exibe retornos variáveis quando nem toda ampliação ou contração de um plano de operacional viável for necessariamente viável (Fare, Grosskopf & Knox Lovell, 1994).

2.4 O Modelo CCR Básico

Charnes, Cooper & Rhodes (1979) modificaram o Modelo CCR Seminal impondo as restrições $n_i \geq e$, $m_p \geq e$, $e > 0$ não-arquimediano, para assegurar que todas as “taxas de substituição” e todas as “taxas de troca” sejam positivas, como retratado no Modelo CCR Básico transcrito na Figura 2.5 e nas associadas Figuras 2.6 e 2.7, que apresentam, respectivamente, os Modelos CCR Básicos voltados para contração do consumo e para ampliação da produção. Reflexos desse conjunto de restrições são as variáveis s_i^- , para $i = 1, 2, \dots, I$, e s_p^+ , para $p = 1, 2, \dots, P$, que aparecerem nas Formas do Envelopamento e que explicitam, respectivamente, folgas de consumo (quantidades de insumos disponíveis, mas não consumidas) e excessos de produção (quantidades de produtos geráveis, mas não geradas) .

$$\Omega_0 = \max_{m_p, n_i} \frac{\sum_{p=1}^P m_p y_{p0}}{\sum_{i=1}^I n_i x_{i0}}$$

sujeito a

$$\frac{\sum_{p=1}^P m_p y_{pn}}{\sum_{i=1}^I n_i x_{in}} \leq 1; \quad n = 1, \dots, N$$

$$n_i \geq e; \quad i = 1, \dots, I$$

$$m_p \geq e; \quad p = 1, \dots, P$$

$$e > 0, \text{ não arquimediano}$$

Figura 2.5 O Modelo CCR Básico

FORMA DOS MULTIPLICADORES	FORMA DO ENVELOPAMENTO
$C_0 = \max \sum \mathbf{m}_p y_{p0}$ <p><i>sujeito a</i></p> $\sum \mathbf{n}_i x_{i0} = 1$ $-\sum \mathbf{n}_i x_{in} + \sum \mathbf{m}_p y_{pn} \leq 0, \quad n = 1, \dots, N$ $-\mathbf{m}_p \leq -\mathbf{e}, \quad p = 1, \dots, P$ $-\mathbf{n}_i \geq -\mathbf{e}, \quad i = 1, \dots, I$ $\mathbf{e} > 0, \text{ não arquimediano}$	$E^* = \min \mathbf{q} - \mathbf{e}(\sum s_p^+ + \sum s_i^-)$ <p><i>sujeito a</i></p> $\sum y_{pn} z_n - s_p^+ = y_{p0}, \quad p = 1, \dots, P$ $\mathbf{q} x_{i0} - \sum x_{in} z_n - s_i^- = 0, \quad i = 1, \dots, I$ $\mathbf{q} \in R;$ $z_n \geq 0, \quad n = 1, \dots, N$ $s_i^- \geq 0, \quad i = 1, \dots, I$ $s_p^+ \geq 0, \quad p = 1, \dots, P;$ $\mathbf{e} > 0, \text{ não arquimediano}$

Figura 2.6 O Modelo CCR Básico orientado para contração do consumo

FORMA DO MULTIPLICADORES	FORMA DO ENVELOPAMENTO
$B_0 = \min \sum \mathbf{n}_i x_{i0}$ <p><i>sujeito a</i></p> $\sum \mathbf{m}_p y_{p0} = 1$ $\sum \mathbf{n}_i x_{in} - \sum \mathbf{m}_p y_{pn} \geq 0, \quad n = 1, \dots, N$ $\mathbf{m}_p \geq \mathbf{e}, \quad p = 1, \dots, P$ $\mathbf{n}_i \geq \mathbf{e}, \quad i = 1, \dots, I$ $\mathbf{e} > 0, \text{ não arquimediano}$	$F^* = \max \mathbf{I} + \mathbf{e}(\sum s_p^+ + \sum s_i^-)$ <p><i>sujeito a</i></p> $\mathbf{I} y_{p0} - \sum y_{pn} z_n + s_p^+ = 0, \quad p = 1, \dots, P$ $\sum x_{in} z_n + s_i^- = x_{i0}, \quad i = 1, \dots, I$ $\mathbf{I} \in R;$ $z_n \geq 0, \quad n = 1, \dots, N$ $s_i^- \geq 0, \quad i = 1, \dots, I$ $s_p^+ \geq 0, \quad p = 1, \dots, P;$ $\mathbf{e} > 0, \text{ não arquimediano}$

Figura 2.7 O Modelo CCR Básico orientado para expansão da produção

As restrições $\mathbf{n}_i \geq \mathbf{e}$, $\mathbf{m}_p \geq \mathbf{e}$ e suas variáveis duais $s_i^- \geq 0$ e $s_p^+ \geq 0$ garantem que o plano $[X^0, Y^0]$ é eficiente somente quando $C_0^* = E^* = 1$ ou quando $B_0^* = F^* = 1$. A primeira condição ($C_0^* = E^* = 1$) ocorre somente quando, no Modelo CCR Básico orientado para contração do consumo, $\mathbf{q}^* = 1$, $s_i^{-*} = 0$ para $i = 1, 2, \dots, I$, e $s_p^{+*} = 0$ para $p = 1, 2, \dots, P$, condições que asseguram o plano $[X^0, Y^0]$ ser eficiente segundo Koopmans. Do mesmo modo, a segunda condição ($B_0^* = F^* = 1$) ocorre somente quando, no Modelo CCR Básico orientado para expansão da produção, $\mathbf{I}^* = 1$, $s_i^{-*} = 0$ para $i = 1, 2, \dots, I$, e $s_p^{+*} = 0$ para $p = 1, 2, \dots, P$, condições que asseguram o plano $[X^0, Y^0]$ ser eficiente segundo Koopmans. Assim, em ambos os casos, os multiplicadores ótimos calculados pelo Modelo CCR Básico são características de planos eficientes segundo Koopmans. Por conseguinte, $[X^*, Y^*] = [\mathbf{q}^* X^0 - s^{-*}, Y^0 + s^{+*}]$ é uma meta eficiente (Koopmans) que pode ser estabelecida para a DMU⁰ quando se deseja diminuir o consumo, e, $[X^*, Y^*] = [X^0 - s^{-*}, \mathbf{I}^* Y^0 + s^{+*}]$ é uma meta eficiente quando se deseja aumentar a produção¹⁷.

O fato de $\mathbf{e} > 0$ ser um número não-arquimediano traz dificuldades do ponto de vista computacional: a fixação de um valor para ele. Por um lado, a magnitude de \mathbf{e} é variável, pois depende das unidades das medidas dos insumos e dos produtos; por outro, \mathbf{e} deve ser suficientemente pequeno para que prevaleça a orientação da avaliação desejada, isto é, que a contração do consumo, refletida em minimizar \mathbf{q} ou, alternativamente, que a expansão da produção, refletida em maximizar \mathbf{I} , prevaleça frente ao crescimento das folgas e dos excessos, refletida em maximizar $\mathbf{e} [\sum s_p^+ + \sum s_i^-]$ ¹⁸. Para contornar essa dificuldade, os Modelos CCR Básicos costumam ser resolvidos em duas fases:

- promovendo, na primeira, o maior deslocamento equiproporcional na direção da fronteira de eficiência, minimizando \mathbf{q} ou maximizando \mathbf{I} , conforme a orientação desejada, como proposto no problema da Figura 2.8 ;

¹⁷ $s^{-*} = \{ s_i^{-*} \}$ e $s^{+*} = \{ s_p^{+*} \}$ correspondem aos vetores de folgas dos insumos e excessos de produção ótimos.

¹⁸ Ali & Seiford (1993) aborda com muita propriedade esse problema.

REDUÇÃO DO CONSUMO	EXPANSÃO DA PRODUÇÃO
$\mathbf{q}^* = \min \mathbf{q}$	$\mathbf{I}^* = \max \mathbf{I}$
<i>sujeito a</i>	<i>sujeito a</i>
$\sum y_{pn} z_n - s_p^+ = y_{p0}, \quad p = 1, \dots, P$	$\mathbf{I} y_{p0} - \sum y_{pn} z_n + s_p^+ = 0, \quad p = 1, \dots, P$
$\mathbf{q} x_{i0} - \sum x_{in} z_n - s_i^- = 0, \quad i = 1, \dots, I$	$\sum x_{in} z_n + s_i^- = x_{i0}, \quad i = 1, \dots, I$
$\mathbf{q} \in R;$	$\mathbf{I} \in R;$
$z_n \geq 0, \quad n = 1, \dots, N$	$z_n \geq 0, \quad n = 1, \dots, N$
$s_i^- \geq 0, \quad i = 1, \dots, I$	$s_i^- \geq 0, \quad i = 1, \dots, I$
$s_p^+ \geq 0, \quad p = 1, \dots, P;$	$s_p^+ \geq 0, \quad p = 1, \dots, P;$

Figura 2.8 – Fase I da Solução Computacional do Modelo CCR Básico

REDUÇÃO DO CONSUMO	EXPANSÃO DA PRODUÇÃO
$E = \max (\sum s_p^+ + \sum s_i^-)$	$F = \max (\sum s_p^+ + \sum s_i^-)$
<i>sujeito a</i>	<i>sujeito a</i>
$\sum y_{pn} z_n - s_p^+ = y_{p0}, \quad p = 1, \dots, P$	$\mathbf{I}^* y_{p0} - \sum y_{pn} z_n + s_p^+ = 0, \quad p = 1, \dots, P$
$\mathbf{q}^* x_{i0} - \sum x_{in} z_n - s_i^- = 0, \quad i = 1, \dots, I$	$\sum x_{in} z_n + s_i^- = x_{i0}, \quad i = 1, \dots, I$
$z_n \geq 0, \quad n = 1, \dots, N$	$z_n \geq 0, \quad n = 1, \dots, N$
$s_i^- \geq 0, \quad i = 1, \dots, I$	$s_i^- \geq 0, \quad i = 1, \dots, I$
$s_p^+ \geq 0, \quad p = 1, \dots, P;$	$s_p^+ \geq 0, \quad p = 1, \dots, P;$

Figura 2.9 – Fase II da Solução Computacional do Modelo CCR Básico

- promovendo, a seguir, um deslocamento não-equiproporcional na direção da fronteira de eficiência, maximizando $[\sum s_p^+ + \sum s_i^-]$, como proposto no problema da Figura 2.9 .

2.5 O Modelo BCC Básico

Banker, Charnes & Cooper (1984) modificaram o Modelo CCR Básico para permitir à tecnologia exibir retornos variáveis a mudanças na escala de operação, como retratado nas Figuras 2.10 e 2.11. A restrição adicional da tecnologia ser convexa ($\sum z_n = 1$) imposta na Forma do Envelopamento do Modelo BCC Básico reflete-se na variável dual associada M que caracteriza a propriedade da fronteira de eficiência ser localmente crescente ($M^* > 1$), constante ($M^* = 0$) ou decrescente ($M^* < 1$) na vizinhança da solução eficiente $[X^*, Y^*] = \sum z_n^* [X^n, Y^n]$.

Salvo a restrição de convexidade da tecnologia, os Modelos CCR e BCC são iguais. As interpretações dos multiplicadores $n_i \geq e$, $m_p \geq e$, folgas $s_i^- \geq 0$, $i = 1, \dots, I$; e excessos $s_p^+ \geq 0$, $p = 1, \dots, P$; do Modelo CCR Básico valem também para o Modelo BCC Básico. Como a tecnologia do Modelo BCC é mais restrita que a do Modelo CCR, o valor ótimo q^* do Modelo BCC é maior ou igual ao valor ótimo q^* do Modelo CCR, quando há orientação para contração do consumo; por sua vez, o valor ótimo I^* do Modelo BCC é menor ou igual ao valor ótimo I^* do Modelo CCR quando há orientação para ampliação da produção. Ademais, os valores ótimos são iguais somente quando a restrição de convexidade é inoperante. Tais fatos são empregados para testar se a tecnologia exibe retornos de escala variáveis ou constantes na vizinhança do plano eficiente $[X^*, Y^*] = z_n^* [X^n, Y^n]$, posto que, quando os valores ótimos são iguais, a restrição de convexidade é inócua, existindo, portanto, indícios da tecnologia exibir retornos constantes; quando diferentes, da tecnologia exibir retornos variáveis.

A aplicação simultânea dos Modelos CCR e BCC Básicos, além de permitir identificar o tipo de retornos a mudanças de escala que a tecnologia exibe, também possibilita decompor a ineficiência técnica em duas componentes: a ineficiência de

FORMA DOS MULTIPLICADORES	FORMA DO ENVELOPAMENTO
$C_0 = \max \sum \mathbf{m}_p y_{p0} + M$ <p><i>sujeito a</i></p> $\sum \mathbf{n}_i x_{i0} = 1$ $-\sum \mathbf{n}_i x_{in} + \sum \mathbf{m}_p y_{pn} + M \leq 0, \quad n = 1, \dots, N$ $-\mathbf{m}_p \leq -\mathbf{e}, \quad p = 1, \dots, P$ $-\mathbf{n}_i \geq -\mathbf{e}, \quad i = 1, \dots, I$ $\mathbf{e} > 0, \text{ não arquimediano}$	$E^* = \min \mathbf{q} \cdot \mathbf{e} (\sum s_p^+ + \sum s_i^-)$ <p><i>sujeito a</i></p> $\sum y_{pn} z_n - s_p^+ = y_{p0}, \quad p = 1, \dots, P$ $\mathbf{q} x_{i0} - \sum x_{in} z_n - s_i^- = 0, \quad i = 1, \dots, I$ $\sum_{n=1}^N z_n = 1 \quad z_n \geq 0, \quad n = 1, \dots, N$ $\mathbf{q} \in R;$ $s_i^- \geq 0, \quad i = 1, \dots, I$ $s_p^+ \geq 0, \quad p = 1, \dots, P;$ $\mathbf{e} > 0, \text{ não arquimediano}$

Figura 2.10 O Modelo BCC Básico orientado para contração do consumo

FORMA DO MULTIPLICADORES	FORMA DO ENVELOPAMENTO
$B_0 = \min \sum \mathbf{n}_i x_{i0} + M$ <p><i>sujeito a</i></p> $\sum \mathbf{m}_p y_{p0} = 1$ $\sum \mathbf{n}_i x_{in} - \sum \mathbf{m}_p y_{pn} + M \geq 0, \quad n = 1, \dots, N$ $\mathbf{m}_p \geq \mathbf{e}, \quad p = 1, \dots, P$ $\mathbf{n}_i \geq \mathbf{e}, \quad i = 1, \dots, I$ $\mathbf{e} > 0, \text{ não arquimediano}$	$F^* = \max \mathbf{l} + \mathbf{e} (\sum s_p^+ + \sum s_i^-)$ <p><i>sujeito a</i></p> $\mathbf{l} y_{p0} - \sum y_{pn} z_n + s_p^+ = 0, \quad p = 1, \dots, P$ $\sum x_{in} z_n + s_i^- = x_{i0}, \quad i = 1, \dots, I$ $\sum_{n=1}^N z_n = 1 \quad z_n \geq 0, \quad n = 1, \dots, N$ $\mathbf{l} \in R;$ $s_i^- \geq 0, \quad i = 1, \dots, I$ $s_p^+ \geq 0, \quad p = 1, \dots, P;$ $\mathbf{e} > 0, \text{ não arquimediano}$

Figura 2.11 O Modelo BCC Básico orientado para expansão da produção

escala e a ineficiência de gestão, como descrito detalhadamente por Banker, Charnes & Cooper (1984) .

2.6 O Modelo CCR-DT de Dyson & Thanassoulis (1988)

Esse modelo foi aplicado para avaliar a eficiência de departamentos de municípios ingleses (DMUs) em sua tarefa de arrecadar impostos (produtos). Trata-se de um Modelo CCR Básico simplificado, como descrito na Figura 2.12, que emprega um único insumo (recursos orçamentários) na geração de P produtos, isto é, trata-se de um modelo que simula a aplicação de recursos orçamentários no custeio da arrecadação dos vários impostos municipais.

Seja x_0 a quantia de recursos orçamentários empregada pelo departamento municipal (DMU^0) na arrecadação dos P impostos $Y^0 = \{ y_{p0} \}$. Seja x_{op} a quantia de recursos orçamentários gasta na arrecadação da quantia y_{p0} do imposto p , $p = 1, 2, \dots, P$. Então, $x_0 = \sum x_{op}$.

Observe-se que o problema de otimização da Figura 2.12 é equivalente ao Modelo CCR-DT de Dyson & Thanassoulis descrito na Figura 2.13, quando $\bar{m}_p = \mu_p/v$, para $v > 0$. Por conseguinte: (i) quando o plano $[X^0, Y^0]$ é eficiente, então $\bar{\Omega}_0^* = 1$ e $\sum \bar{m}_p^* y_{p0} = x_0$, e, (ii) quando ineficiente, $\bar{\Omega}_0^* < 1$ e $\sum \bar{m}_p^* y_{p0} < x_0$. Porém, nos dois casos, os multiplicadores \bar{m}_p^* , $p = 1, \dots, P$ sempre são característicos de planos de operação eficientes.

Observe, na Figura 2.13, que $\bar{m}_p \cdot y_{p0}$ e x_0 tem a mesma unidade de medida (recursos orçamentários) pois $\bar{\Omega}^0 = \Omega^0$ é um número adimensional. Então o multiplicador \bar{m}_p , $p = 1, \dots, P$ pode ser interpretado como **“a quantia de recursos orçamentários (insumo) consumido para gerar uma unidade monetária do imposto P (produto)”**.

$$\Omega^0 = \max_{\mathbf{m}_p, \mathbf{n}} \frac{\sum \mathbf{m}_p y_{p0}}{\mathbf{n} x_0} = \frac{\sum \left(\frac{\mathbf{m}_p}{\mathbf{n}} \right) y_{p0}}{x_0}$$

sujeito a

$$\frac{\sum \mathbf{m}_p y_{pn}}{\mathbf{n} x_n} = \frac{\sum \left(\frac{\mathbf{m}_p}{\mathbf{n}} \right) y_{pn}}{x_n} \leq 1; \quad n = 1, \dots, N$$

$$\mathbf{m}_p \geq \mathbf{e}, \quad p = 1, \dots, P$$

$$\mathbf{n} \geq \mathbf{e};$$

$$\mathbf{e} > 0, \text{ não arquimediano}$$

Figura 2.12 O Modelo CCR Básico simplificado: um único insumo

$$\overline{\Omega}_0 = \max_{\overline{\mathbf{m}}_p} \frac{\sum \overline{\mathbf{m}}_p y_{p0}}{x_0}$$

sujeito a

$$\frac{\sum \overline{\mathbf{m}}_p y_{pn}}{x_n} \leq 1; \quad n = 1, \dots, N$$

$$\overline{\mathbf{m}}_p \geq \mathbf{e}, \quad p = 1, \dots, P$$

$$\mathbf{e} > 0, \text{ não arquimediano}$$

Figura 2.13 O Modelo CCR-DT de Dyson & Thanassoulis

Considere as equações $\sum \bar{m}_p^* y_{p0} = x_0$ e $\sum \bar{m}_p^* y_{p0} < x_0$. Tendo em vista a definição de x_{op} , pode-se dizer que nos planos eficientes, $x_{op} = \bar{m}_p^* \cdot y_{p0}$ corresponde à quantia de recursos orçamentários gasta pela DMU⁰ para arrecadar, **com eficiência**, as y_{p0} unidades monetárias do imposto p , visto que \bar{m}_p^* , $p = 1, \dots, P$ são multiplicadores característicos de planos de operação eficientes. Por outro lado, em planos de operação ineficientes, $x_{op} = \bar{m}_p^* \cdot y_{p0}$ pode ser interpretado como a quantidade mínima de recursos que a DMU⁰ poderia ter gasto, visto que \bar{m}_p^* , $p = 1, \dots, P$ são multiplicadores característicos de uma meta eficiente, formada como combinação linear de planos de operação eficientes, que pode ser tomada como referência para a DMU⁰. Desse modo, como o plano $[X^0, Y^0]$ é ineficiente, então a DMU⁰ teria gasto mais que o mínimo necessário e, conseqüentemente, $x_0 > \sum \bar{m}_p^* y_{p0}$. Por conseguinte, a DMU⁰ gastou a quantia $[x_0 - \sum \bar{m}_p^* y_{p0}] = [1 - \bar{\Omega}_0^*] \cdot x_0$ a mais daquela necessária para gerar Y^0 eficientemente.

Em resumo, no caso de um único insumo, o multiplicador ótimo \bar{m}_p^* pode ser interpretado como sendo a quantidade do insumo gasta na geração eficiente de uma unidade do produto p , interpretação¹⁹ essa que permite justificar a quantificação de limites para os multiplicadores dos produtos.

Baseados nesse fato, Dyson & Thanassoulis estabelecem restrições para os multiplicadores dos produtos, como descrito na Figura 2.14. Nesse Modelo CCR-DT, os limites inferior lP_p e superior LP_p do multiplicador m_p correspondem às quantidades de insumo mínima e máxima admissíveis na geração de cada unidade do produto p .

¹⁹ Essa interpretação não é válida quando há mais de um insumo.

FORMA DOS MULTIPLICADORES	FORMA DO ENVELOPAMENTO
$B_0 = \min \sum \mathbf{n}_i x_{i0}$	$F^* = \max \mathbf{I} + \mathbf{e}(\sum s_p^+ + \sum s^-)$
sujeito a	sujeito a
$\sum \mathbf{m}_p y_{p0} = 1$	$\mathbf{I} y_{p0} - \sum \mathbf{m}_p y_{pn} - n_p^+ + r_p^+ + s_p^+ = 0, \quad p = 1, \dots, P$
$\mathbf{n} x_n - \sum \mathbf{m}_p y_{pn} \geq 0, \quad n = 1, \dots, N$	$x_n z_n + \sum l P_p n_p^+ - \sum L P_p r_p^+ + s^- = x_{i0},$
$-\mathbf{m}_p + \mathbf{n} l P_p \leq 0, \quad p = 1, \dots, P$	$\mathbf{I} \in R; \quad z_n \geq 0, \quad n = 1, \dots, N$
$\mathbf{m}_p - \mathbf{n} L P_p \leq 0, \quad p = 1, \dots, P$	$s_p^+ \geq 0, \quad p = 1, \dots, P$
$\mathbf{n} \geq \mathbf{e}, \quad i = 1, \dots, I$	$s^- \geq 0,$
$\mathbf{m}_p \geq \mathbf{e}, \quad p = 1, \dots, P$	$r_p \geq 0 \quad n_p \geq 0 \quad p = 1, \dots, P$
$\mathbf{e} > 0, \text{ não arquimediano}$	$\mathbf{e} > 0, \text{ não arquimediano}$

Figura 2.14 Forma dos Multiplicadores e Forma do Envolvimento do Modelo CCR-DT

2.7 O Modelo CCR-WB de Wong & Beasley (1990)

As utilidades individuais dos produtos relativamente à utilidade da produção do plano de operação $[X^0, Y^0]$, bem como as utilidades individuais dos insumos relativamente à utilidade do consumo desse plano, podem ser empregadas para estabelecer limites para os multiplicadores \mathbf{m}_p e \mathbf{n}_i . Nessa direção, esses autores propõem o Modelo CCR-WB descrito na Figura 2.15, no qual:

- as utilidades relativas dos produtos \mathbf{m}_{pn} e a utilidade relativa dos insumos x_{in} no plano de operação $[X^n, Y^n]$ são medidas pelas razões $\mathbf{m}_p y_{pn} / \sum \mathbf{m}_p y_{pn}$ e $\mathbf{n}_i x_{in} / \sum \mathbf{n}_i x_{in}$, respectivamente;
- limites inferior $l P_p^n$ e superior $L P_p^n$ são fixados para cada produto p de modo que: $0 < l P_p^n \leq \mathbf{m}_p y_{pn} / \sum \mathbf{m}_p y_{pn} \leq L P_p^n$, $n = 1, \dots, N$; $p = 1, \dots, P$.
- limites inferior $l I_i^n$ e superior $L I_i^n$ são fixados para cada insumo i de modo que: $0 < l I_i^n \leq \mathbf{n}_i x_{in} / \sum \mathbf{n}_i x_{in} \leq L I_i^n$, $n = 1, \dots, N$; $i = 1, \dots, I$.

$$\begin{aligned}
\Omega_0 &= \max_{\mathbf{m}_p, \mathbf{n}_i} \frac{\sum_{p=1}^P \mathbf{m}_p y_{p0}}{\sum_{i=1}^I \mathbf{n}_i x_{i0}} \\
&\text{sujeito a} \\
&\frac{\sum_{p=1}^P \mathbf{m}_p y_{pn}}{\sum_{i=1}^I \mathbf{n}_i x_{in}} \leq 1; \quad n = 1, \dots, N \\
&\mathbf{n}_i \geq \mathbf{e}; \quad i = 1, \dots, I; \quad \mathbf{m}_p \geq \mathbf{e}; \quad p = 1, \dots, P; \\
&\mathbf{e} > 0, \text{ não arquimediano} \\
&LP_p^n \leq \frac{\mathbf{m}_p y_{pn}}{\sum \mathbf{m}_p y_{in}} \leq LP_p^n, \quad n = 1, \dots, N, \quad p = 1, \dots, P \\
&LI_i^n \leq \frac{\mathbf{n}_i x_{in}}{\sum \mathbf{n}_i x_{in}} \leq LI_i^n, \quad n = 1, \dots, N, \quad i = 1, \dots, I
\end{aligned}$$

Figura 2.15 O Modelo CCR-WB de Wong & Beasley

Duas são as principais dificuldades no emprego desse modelo. A primeira diz respeito ao estabelecimento de um conjunto consistente para os limites LP_p^n , LP_p^n , LI_i^n e LI_i^n . A segunda é de ordem computacional, haja vista que $2N(I + P)$ restrições são acrescentadas ao modelo CCR Básico quando o banco de dados for muito grande. Com vistas a contornar tais dificuldades costuma-se adotar uma das três alternativas:

- aplicar limites para as utilidades relativas de alguns produtos e de alguns insumos somente no plano $[X^0, Y^0]$; nesse caso, o número máximo de restrições adicionais reduz-se a $(I + P)$;
- aplicar limites para alguns produtos e alguns insumos em todos os planos observados; nesse caso, o número máximo de restrições adicionais é reduzido a $2N$ para cada insumo ou produto cuja utilidade relativa foi limitada;

- aplicar limites para as quantidades médias geradas e consumidas considerando todos os planos observados; nesse caso, o número máximo de restrições adicionais reduz-se a $(I + P)$.

O Modelo CCR de Wong & Beasley com limites estabelecidos somente para o plano de operação $[X^0, Y^0]$ e as correspondentes Formas dos Multiplicadores e do Envelopamento, orientadas para contração do consumo, estão descritas nas Figuras 2.16 e 2.17. Por sua vez, as Figuras 2.18 e 2.19 transcrevem esse modelo quando os limites dos multiplicadores são estabelecidos para as médias dos produtos gerados $\bar{y}_p = \sum y_{pn} / N$. As demais formulações do Modelo CCR de Wong & Beasley são desenvolvidas de modo semelhante.

$$\Omega_0 = \max_{\mathbf{m}_p, \mathbf{n}_i} \sum_{p=1}^P \mathbf{m}_p y_{p0} / \sum_{i=1}^I \mathbf{n}_i x_{i0}$$

sujeito a

$$\sum_{p=1}^P \mathbf{m}_p y_{pn} / \sum_{i=1}^I \mathbf{n}_i x_{in} \leq 1; \quad n = 1, \dots, N$$

$$\mathbf{n}_i \geq \mathbf{e}; \quad i = 1, \dots, I$$

$$\mathbf{m}_p \geq \mathbf{e}; \quad p = 1, \dots, P$$

$\mathbf{e} > 0$, não arquimediano

$$lP_p \leq \mathbf{m}_p y_{p0} / \sum \mathbf{m}_p y_{i0} \leq LP_p, \quad p = 1, \dots, P$$

$$lI_i \leq \mathbf{n}_i x_{i0} / \sum \mathbf{n}_i x_{i0} \leq LI_i, \quad i = 1, \dots, I$$

Figura 2.16 O Modelo CCR-WB com limites nos multiplicadores somente para o plano de operação $[X^0, Y^0]$

MODELO CCR-WB ORIENTADO PARA EXPANSÃO DA PRODUÇÃO

FORMA DOS MULTIPLICADORES

$$B_0 = \min \sum \mathbf{n}_i x_{i0} \quad \text{sujeito a}$$

$$\sum \mathbf{m}_p y_{p0} = 1$$

$$\sum \mathbf{n}_i x_{in} - \sum \mathbf{m}_p y_{pn} \geq 0, \quad n = 1, \dots, N$$

$$lP_p \cdot \sum \mathbf{m}_p y_{i0} - \mathbf{m}_p y_{p0} = lP_p \cdot \sum_{t \neq p} \mathbf{m}_t y_{i0} + [lP_p - 1] \cdot \mathbf{m}_p y_{p0} \leq 0, \quad p = 1, \dots, P$$

$$\mathbf{m}_p y_{p0} - lP_p \cdot \sum \mathbf{m}_p y_{i0} = [1 - lP_p] \cdot \mathbf{m}_p y_{p0} - lP_p \cdot \sum_{t \neq p} \mathbf{m}_t y_{i0} \leq 0, \quad p = 1, \dots, P$$

$$lI_i \cdot \sum \mathbf{n}_i x_{i0} - \mathbf{n}_i x_{i0} = [lI_i - 1] \cdot \mathbf{n}_i x_{i0} + lI_i \cdot \sum_{t \neq i} \mathbf{n}_t x_{i0} \leq 0, \quad i = 1, \dots, I$$

$$\mathbf{n}_i x_{i0} - lI_i \sum \mathbf{n}_i x_{i0} = [1 - lI_i] \cdot \mathbf{n}_i x_{i0} - lI_i \sum_{t \neq i} \mathbf{n}_t x_{i0} \leq 0, \quad i = 1, \dots, I$$

$$-\mathbf{m}_p \leq -\mathbf{e}, \quad p = 1, \dots, P$$

$$-\mathbf{n}_i \leq -\mathbf{e}, \quad i = 1, \dots, I$$

$\mathbf{e} > 0$, não arquimediano

FORMA DO ENVELOPAMENTO

$$F^* = \max \mathbf{I} + \mathbf{e}(\sum s_p^+ + \sum s_i^-) \quad \text{sujeito a}$$

$$\mathbf{I} y_{p0} - \sum y_{pn} z_n + [lP_p - 1] \cdot y_{p0} r_p^+ + [1 - lP_p] \cdot y_{p0} n_p^+ - s_p^+ = 0, \quad p = 1, \dots, P$$

$$\sum x_{in} z_n + [lI_i - 1] \cdot x_{i0} r_i^- + [1 - lI_i] \cdot x_{i0} n_i^- - s_i^- = x_{i0} \quad i = 1, \dots, I$$

$$\mathbf{I} \in R; \quad z_n \geq 0, \quad n = 1, \dots, N$$

$$s_p^+ \geq 0, \quad r_p^+ \geq 0, \quad n_p^+ \geq 0, \quad p = 1, \dots, P$$

$$s_i^- \geq 0, \quad r_i^- \geq 0, \quad n_i^- \geq 0, \quad i = 1, \dots, I$$

$\mathbf{e} > 0$, não arquimediano

Figura 2.17 A Forma dos Multiplicadores e a Forma do Envelopamento do Modelo CCR-WB orientado para expansão da produção, com limites nos multiplicadores somente para o plano de operação $[X^0, Y^0]$

$$\begin{aligned}
\Omega_0 &= \max_{\mathbf{m}_p, \mathbf{n}_i} \frac{\sum_{p=1}^P \mathbf{m}_p y_{p0}}{\sum_{i=1}^I \mathbf{n}_i x_{i0}} \\
\text{sujeito a} \\
\frac{\sum_{p=1}^P \mathbf{m}_p y_{pn}}{\sum_{i=1}^I \mathbf{n}_i x_{in}} &\leq 1; & n = 1, \dots, N \\
\mathbf{n}_i &\geq \mathbf{e}; & i = 1, \dots, I & \mathbf{m}_p &\geq \mathbf{e}; & p = 1, \dots, P \\
\mathbf{e} &> 0, \text{ não arquimediano} \\
LP_p &\leq \mathbf{m}_p \overline{y_p} / \sum \mathbf{m}_p \overline{y_i} \leq LP_p, \text{ para } \overline{y_p} = \sum y_{pn} \text{ e } & p = 1, \dots, P \\
LI_i &\leq \mathbf{n}_i \overline{x_i} / \sum \mathbf{n}_i \overline{x_i} \leq LI_i, \text{ para } \overline{x_i} = \sum x_{in} \text{ e } & i = 1, \dots, I
\end{aligned}$$

Figura 2.18 O modelo CCR-WB com limites dos multiplicadores associados às quantidades médias dos produtos gerados

2.8 O Modelo CCR-ACS de Ali, Cook & Seiford (1991)

Golany (1988) descreveu circunstâncias e formas de serem usadas limitações de relações ordinais para “taxas de substituição” de insumo e/ou “taxas de troca” para produtos. Ali, Cook & Seiford (1991) detectaram incoerências matemáticas no modelo de Golany e propuseram aperfeiçoamentos sob a forma de dois modelos: um considerando relações ordinais fortes, segundo as quais duas “taxas de substituição” (ou “de trocas”) não poderiam assumir valores iguais; e outra considerando relações ordinais fracas, segundo as quais duas “taxas de substituição” (ou “de troca”) poderiam assumir valores iguais.

A Figura 2.20 apresenta o Modelo CCR de Ali, Cook & Seiford com relação forte para as “taxas de troca” dos últimos b produtos, uma vez que as restrições $\mathbf{m}_p > \mathbf{m}_{p+1}$ para $p = (P-b+1), \dots, (P-1)$ expressam o ordenamento $\mathbf{m}_{P-b+1} > \mathbf{m}_{P-b+2} > \dots > \mathbf{m}_{P-1} > \mathbf{m}_P \geq \mathbf{e} > 0$. De modo idêntico, a Figura 2.21 transcreve o Modelo CCR-ACS com relação fraca, visto que as restrições $\mathbf{m}_p \geq \mathbf{m}_{p+1}$ expressam o ordenamento $\mathbf{m}_{P-b+1} \geq \mathbf{m}_{P-b+2} \geq \dots \geq \mathbf{m}_{P-1} \geq \mathbf{m}_P \geq \mathbf{e} > 0$. Modelos CCR de Ali, Cook &

MODELO CCR-ACS ORIENTADO PARA EXPANSÃO DA PRODUÇÃO
FORMA DOS MULTIPLICADORES

$$\begin{aligned}
 B_0 &= \min \sum \mathbf{n}_i x_{i0} && \text{sujeito a} \\
 \sum \mathbf{m}_p y_{p0} &= 1 \\
 \sum \mathbf{n}_i x_{in} - \sum \mathbf{m}_p y_{pn} &\geq 0, && n = 1, \dots, N \\
 lP_p \cdot \sum \mathbf{m}_t \bar{y}_t - \mathbf{m}_p \bar{y}_p &= lP_p \cdot \sum_{t \neq p} \mathbf{m}_t \bar{y}_t + [lP_p - 1] \cdot \mathbf{m}_p \bar{y}_p \leq 0, && p = 1, \dots, P \\
 \mathbf{m}_p \bar{y}_p - LP_p \cdot \sum \mathbf{m}_t \bar{y}_t &= [1 - LP_p] \cdot \mathbf{m}_p \bar{y}_p - LP_p \cdot \sum_{t \neq p} \mathbf{m}_t \bar{y}_t \leq 0, && p = 1, \dots, P \\
 lI_i \cdot \sum \mathbf{n}_t \bar{y}_t - \mathbf{n}_i \bar{x}_i &= [lI_i - 1] \mathbf{n}_i \bar{x}_i + lI_i \cdot \sum_{t \neq i} \mathbf{n}_t \bar{x}_t \leq 0, && i = 1, \dots, I \\
 \mathbf{n}_i \bar{x}_i - LI_i \sum \mathbf{n}_t \bar{x}_t &= [1 - LI_i] \mathbf{n}_i \bar{x}_i - LI_i \sum_{t \neq i} \mathbf{n}_t \bar{x}_t \leq 0, && i = 1, \dots, I \\
 -\mathbf{m}_p &\leq -\mathbf{e}, && p = 1, \dots, P \\
 -\mathbf{n}_i &\leq -\mathbf{e}, && i = 1, \dots, I \\
 \mathbf{e} > 0, && \text{não arquimediano}
 \end{aligned}$$

FORMA DO ENVELOPAMENTO

$$\begin{aligned}
 F^* &= \max \mathbf{I} + \mathbf{e}(\sum s_p^+ + \sum s_i^-) && \text{sujeito a} \\
 \mathbf{I} y_{p0} - \sum y_{pn} z_n + [lP_p - 1] \cdot \bar{y}_p \cdot r_p^+ + [1 - LP_p] \cdot \bar{y}_p \cdot n_p^+ - s_p^+ &= 0, && p = 1, \dots, P \\
 \sum x_{in} z_n + [lI_i - 1] \bar{x}_i \cdot r_i^- + [1 - LI_i] \bar{x}_i \cdot n_i^- - s_i^- &= x_{i0}, && i = 1, \dots, I \\
 \mathbf{I} \in R; && z_n \geq 0, && n = 1, \dots, N \\
 s_p^+ \geq 0, && r_p^+ \geq 0, && n_p^+ \geq 0, && p = 1, \dots, P \\
 s_i^- \geq 0, && r_i^- \geq 0, && n_i^- \geq 0, && i = 1, \dots, I \\
 \mathbf{e} > 0, && \text{não arquimediano}
 \end{aligned}$$

Figura 2.19 A Forma dos Multiplicadores e a Forma do Envolvimento do Modelo CCR-WB com limites dos multiplicadores associados às quantidades médias dos produtos gerados

$$\Omega_0 = \max_{\mathbf{m}_p, \mathbf{n}_i} \frac{\sum_{p=1}^P \mathbf{m}_p y_{p0}}{\sum_{i=1}^I \mathbf{n}_i x_{i0}}$$

sujeito a

$$\frac{\sum_{p=1}^P \mathbf{m}_p y_{pn}}{\sum_{i=1}^I \mathbf{n}_i x_{in}} \leq 1; \quad n = 1, \dots, N$$

$$\mathbf{m}_p \geq \mathbf{e}; \quad p = 1, \dots, (P-b), P$$

$$\mathbf{m}_{p+1} < \mathbf{m}_p \quad p = (P-b+1), \dots, (P-1)$$

$$\mathbf{n}_i \geq \mathbf{e}; \quad i = 1, \dots, I$$

$$\mathbf{e} > 0, \text{ não arquimediano}$$

Figura 2.20 O Modelo CCR-ACS de Ali, Cook & Seiford com relação forte de “taxas de troca” de produtos

$$\Omega_0 = \max_{\mathbf{m}_p, \mathbf{n}_i} \frac{\sum_{p=1}^P \mathbf{m}_p y_{p0}}{\sum_{i=1}^I \mathbf{n}_i x_{i0}}$$

sujeito a

$$\frac{\sum_{p=1}^P \mathbf{m}_p y_{pn}}{\sum_{i=1}^I \mathbf{n}_i x_{in}} \leq 1; \quad n = 1, \dots, N$$

$$\mathbf{m}_p \geq \mathbf{e}; \quad p = 1, \dots, (P-b), P$$

$$\mathbf{m}_{p+1} \leq \mathbf{m}_p \quad p = (P-b), \dots, (P-1)$$

$$\mathbf{n}_i \geq \mathbf{e}; \quad i = 1, \dots, I$$

$$\mathbf{e} > 0, \text{ não arquimediano}$$

Figura 2.21 O modelo CCR-ACS de Ali, Cook & Seiford com relação fraca de “taxas de troca” de produtos

Seiford são construídos de modo semelhante para expressar relação ordinal forte ($\mathbf{n}_i > \mathbf{n}_{i+1}$) ou fraca ($\mathbf{n}_i \geq \mathbf{n}_{i+1}$) para “*taxas de substituição*” de insumos ou para expressar restrições simultâneas de ordenamento forte e/ou fraca entre produtos e/ou entre insumos.

A Figura 2.22 descreve o Modelo CCR-ACS orientado para expansão da produção e com relações ordinais fortes para as “*taxas de troca*” dos últimos b produtos. As variáveis duais s_p^+ dizem respeito às restrições $\mathbf{m}_p \geq \mathbf{e}$ e as variáveis w_p dizem respeito às restrições $\mathbf{m}_{p+1} - \mathbf{m}_p \geq \mathbf{e}$ e $\mathbf{m}_p \geq \mathbf{e}$. De modo similar são construídos modelos com orientação para contração do consumo.

A construção de modelos com ordenação forte de “*taxas de substituição*” de insumos é semelhante, como também o é a construção de modelos com ordenação forte simultânea de “*taxas de substituição*” e de “*taxas de troca*”.

Na Figura 2.23 encontra-se a Forma do Envelopamento do Modelo CCR-ACS Modificado através de operações matemáticas simples nas restrições $\mathbf{I} y_{p0} - \sum z_n y_{pn} - w_p + w_{p+1} = 0$, $p = (P-b+1), \dots, (P-1)$. Definindo $\overline{y_{p0}} = \sum_{m=p+1}^P y_{p0}$ para $p = (P-b+1), \dots, P$, tal modelo corresponde a um Modelo CCR Básico de fácil solução com os “software” disponíveis no mercado.

A Figura 2.24 transcreve o Modelo CCR-ACS, com orientação para expansão da produção e com relações ordinais fracas de “*taxas de taxas*” para os últimos b produtos. A construção de modelos com relações fracas de “*taxas de substituição*” de insumos é similar, bem como a de modelos com relações simultâneas de “*taxas de substituição*” de insumos e de “*taxas de troca*” de produtos. O modelo da Figura 2.24, em sua Forma do Envelopamento, encontra-se modificado na Figura 2.25 através de operações matemáticas simples nas restrições $\mathbf{I} y_{p0} - \sum y_{pn} z_n + w_p - w_{p+1} = 0$, $p = (P-b+1), \dots, (P-1)$. Todavia, esse modelo modificado não corresponde a nenhum modelo DEA tradicional.

FORMA DOS MULTIPLICADORES	FORMA DO ENVELOPAMENTO
$B_0 = \min \sum \mathbf{n}_i x_{i0}$ <p><i>sujeito a</i></p> $\sum \mathbf{m}_p y_{p0} = 1$ $\mathbf{n}_i x_n - \sum \mathbf{m}_p y_{pn} \geq 0, \quad n = 1, \dots, N$ $-\mathbf{m}_p \leq -\mathbf{e}, \quad p = 1, \dots, P$ $-\mathbf{m}_p \leq -\mathbf{e}, \quad p = 1, \dots, (P-b)$ $\mathbf{m}_{p+1} - \mathbf{m}_p \leq -\mathbf{e}, \quad p = (P-b+1), \dots, (P-1)$ $-\mathbf{n}_i \leq -\mathbf{e},$ $\mathbf{e} > 0, \text{ não arquimediano}$	$F^* = \max \mathbf{I} + \mathbf{e} \left(\sum s_i^+ + \sum_p^{P-b} s_p^+ + \sum_{P-b+1}^P w_p \right)$ <p><i>sujeito a</i></p> $\sum x_{in} z_n - s_i^- = x_{i0}, \quad i = 1, \dots, I$ $\mathbf{I} y_{p0} - \sum y_{pn} z_n - s_p^+ = 0, \quad p = 1, \dots, (P-b)$ $\mathbf{I} y_{p0} - \sum y_{pn} z_n - w_p = 0, \quad p = P-b+1$ $\mathbf{I} y_{p0} - \sum y_{pn} z_n - w_p + w_{p+1} = 0, \quad p = (P-b+1), \dots, (P-1)$ $\mathbf{I} \in \mathbf{R}; \quad z_n \geq 0, \quad n = 1, \dots, N;$ $s_i^- \geq 0, \quad i = 1, \dots, I; \quad s_p^+ \geq 0, \quad p = 1, \dots, (P-b)$ $w_p \geq 0, \quad p = (P-b+1), \dots, P$ $\mathbf{e} > 0, \text{ não arquimediano}$

Figura 2.22 A Forma dos Multiplicadores e a Forma do Envolvamento do Modelo CCR-ACS, com orientação para a expansão da produção e com relações ordinais fortes para “taxas de taxa” .

FORMA DO ENVELOPAMENTO	
$\bar{F} = \max \mathbf{I} + \mathbf{e} \left(\sum s_i^+ + \sum_p^{P-b} s_p^+ + \sum_{P-b+1}^P w_p \right)$ <p><i>sujeito a</i></p> $\sum x_{in} z_n - s_i^- = x_{i0}, \quad i = 1, \dots, I$ $\mathbf{I} y_{p0} - \sum y_{pn} z_n - s_p^+ = 0, \quad p = 1, \dots, (P-b)$ $\mathbf{I} \left[\sum_{P-b+1}^P y_{po} \right] - \sum z_n \left[\sum_{P-b+1}^P y_{po} \right] - w_p = 0, \quad p = (P-b+1), \dots, P$ $\mathbf{I} \in \mathbf{R}; \quad z_n \geq 0, \quad n = 1, \dots, N;$ $s_i^- \geq 0, \quad i = 1, \dots, I;$ $s_p^+ \geq 0, \quad p = 1, \dots, (P-b)$ $w_p \geq 0, \quad p = (P-b+1), \dots, P$	

Figura 2.23 A Forma do Envolvamento do Modelo CCR-ACS Modificado, com orientação para expansão da produção e com relações ordinais fortes para “taxas de troca” .

FORMA DOS MULTIPLICADORES	FORMA DO ENVELOPAMENTO
$B_0 = \min \sum \mathbf{n}_i x_{i0}$ <p><i>sujeito a</i></p> $\sum \mathbf{m}_p y_{p0} = 1$ $\mathbf{n}_i x_n - \sum \mathbf{m}_p y_{pn} \geq 0, \quad n = 1, \dots, N$ $-\mathbf{n}_i \leq -\mathbf{e}, \quad i = 1, \dots, I$ $-\mathbf{m}_p \leq -\mathbf{e}, \quad p = 1, \dots, (P-b)$ $\mathbf{m}_{p+1} - \mathbf{m}_p \leq 0, \quad p = (P-b+1), \dots, (P-1)$ $-\mathbf{m}_p \leq -\mathbf{e},$ $\mathbf{e} > 0, \text{ não arquimediano}$	$F^* = \max \mathbf{I} + \mathbf{e} \left(\sum s_i^+ + \sum_p^{P-b} s_p^+ + \sum_{P-b+1}^P w_p \right)$ <p><i>sujeito a</i></p> $\sum x_{in} z_n - s_i^- = x_{i0}, \quad i = 1, \dots, I$ $\mathbf{I} y_{p0} - \sum y_{pn} z_n - s_p^+ = 0, \quad p = 1, \dots, (P-b)$ $\mathbf{I} y_{p0} - \sum y_{pn} z_n - w_p = 0, \quad p = P-b+1$ $\mathbf{I} y_{p0} - \sum y_{pn} z_n + w_p - w_{p+1} = 0, \quad p = (P-b+1), \dots, (P-1)$ $\mathbf{I} \in R; \quad z_n \geq 0, \quad n = 1, \dots, N;$ $s_i^- \geq 0, \quad i = 1, \dots, I; \quad s_p^+ \geq 0, \quad p = 1, \dots, (P-b)$ $w_p \geq 0, \quad p = (P-b+1), \dots, P$ $\mathbf{e} > 0, \text{ não arquimediano}$

Figura 2.24 A Forma dos Multiplicadores e Forma do Envelopamento do Modelo CCR-ACS, orientado para expansão da produção e com relações ordinais fracas para as “taxas de troca”

FORMA DO ENVELOPAMENTO
$\overline{F} = \max \mathbf{I} + \mathbf{e} \left(\sum s_i^+ + \sum_p^{P-b} s_p^+ + \sum w_p \right) \quad \text{sujeito a}$ $\sum x_{in} z_n - s_i^- = x_{i0}, \quad i = 1, \dots, I$ $\mathbf{I} y_{p0} - \sum y_{pn} z_n - s_p^+ = 0, \quad p = 1, \dots, (P-b)$ $\mathbf{I} \left[\sum_{P-b+1}^P y_{po} \right] - \sum z_n \left[\sum_{P-b+1}^P y_{po} \right] - w_p = 0, \quad p = (P-b+1), \dots, P$ $\mathbf{I} \in R; \quad z_n \geq 0, \quad n = 1, \dots, N;$ $s_i^- \geq 0, \quad i = 1, \dots, I;$ $s_p^+ \geq 0, \quad p = 1, \dots, (P-b)$ $w_p \geq 0, \quad p = (P-b+1), \dots, P$ $\mathbf{e} > 0, \text{ não arquimediano}$

Figura 2.25 A Forma do Envelopamento do Modelo CCR-ACS Modificado, com orientação para expansão da produção e com relações ordinais fracas de “taxas de troca”.

A inclusão de relações ordinais nos modelos BCC é realizada percorrendo os passos acima descritos para o modelo CCR. Relativamente aos Modelos CCR-ACS, os Modelos BCC-ACS contemplam a restrição adicional $\sum z_n = 1$ na Forma do Envelopamento e a variável dual M na Forma dos Multiplicadores. Os Modelos CCR-ACS Modificados oriundos do modelo BCC possuem propriedades análogas às do modelo CCR acima discutido.

3 O BANCO DE DADOS DE REFERÊNCIA

Belloni (2000) selecionou 33 instituições federais de ensino superior e quatro variáveis observadas para trabalhar em sua tese 'Uma Metodologia de Avaliação da Eficiência Produtiva de Universidades Federais Brasileiras'. Essas instituições são heterogêneas, pois têm portes bastante distintos e projetos acadêmicos muito diferentes, como refletido nas variáveis e estatísticas básicas do Banco de Dados de Referência transcritas na tabela 3.1 e ilustradas na Figura 3.1.

Duas fontes de dados foram usadas por esse autor: o Boletim de Dados Físicos e Orçamentários – Instituições de Ensino Superior Supervisionadas pelo MEC - 1975, publicação anual da Secretaria de Ensino Superior do Ministério de Educação e do Desporto - MEC, e o Exame Nacional de Cursos: Relatório – síntese 1998, publicação anual do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais, também desse ministério.

Análise Estatística Exploratória e Análise Envoltória de Dados aplicadas aos dados desses dois documentos levaram à escolha do modelo BCC como sendo o modelo DEA mais apropriado para avaliar a eficiência técnica das 33 instituições de ensino selecionadas. Ademais, foi escolhido o modelo BCC com orientação para a expansão da produção por acreditar-se que, do ponto de vista social, as instituições federais de ensino superior dariam prioridade à expansão dos resultados, ao invés de buscarem a redução dos custos, visto ser grandemente reprimida a demanda por ensino superior no Brasil e serem constantes os recursos a elas alocados em cada ano fiscal.

O insumo selecionado **PROFESSORES** corresponde ao total de professores, não tendo se mostrado estatisticamente significativa sua subdivisão, quer por regime de trabalho, quer por titulação máxima. Os três produtos **FORMADOS, ARTIGOS E IQGRAD** correspondem, respectivamente, ao número total de formados, à quantidade total de artigos publicados e a um indicador de qualidade da graduação, construído por Belloni, a partir dos resultados dos Exames Nacionais do Cursos de

Tabela 3.1 Banco de Dados de Referência

Instituições		Insumo	Produtos		
ORDEM	SIGLA	PROFESSORES	FORMADOS	ARTIGOS	IQGRAD
01	UAM	970	754	55	27,30
02	UFCE	1.357	1.422	197	51,83
03	UFGO	1.127	1.305	85	39,34
04	UFMS	774	781	43	46,42
05	UFMT	1.211	958	15	38,61
06	UFPA	1.826	2.348	47	28,86
07	UFPEL	709	703	54	41,00
08	UFSC	1.657	1.856	377	50,30
09	UFAL	1.066	478	46	39,03
10	UFBA	1.952	1.711	336	57,66
11	UFES	1.136	1.125	72	61,78
12	UFF	2.690	932	88	51,70
13	UFJF	827	716	47	58,01
14	UFMA	884	611	6	37,32
15	UFPB	2.890	1.654	170	37,02
16	UFPI	1.036	809	54	40,20
17	UFPR	1.829	1.874	421	61,64
18	UFRJ	3.424	3.732	1.202	68,09
19	UFRN	1.758	1.354	70	42,80
20	UFRS	2.583	2.088	819	67,08
21	UFSM	1.246	1.212	213	57,85
22	UFUB	1.070	962	23	45,48
23	UnB	1.406	1.106	329	65,91
24	UFV	670	869	387	59,43
25	UFMG	2.748	3.115	806	61,65
26	UFPE	1.636	1.501	329	47,86
27	UFOP	343	278	122	29,42
28	UFRPE	427	267	34	24,40
29	UFRRJ	575	499	171	35,23
30	UFSCAR	579	326	305	49,07
31	UFSE	545	490	49	37,53
32	UNIRIO	586	505	30	46,25
33	URG	550	410	36	43,28
Mínimo		343	267	6	24,40
1ºquartil		690	558	47	38,07
Média		1.336	1.174	213	46,95
Mediana		1.127	958	85	46,25
3ºquartil		1.792	1.578	329	57,93
Máximo		3.424	3.732	1.202	68,09

Fonte: Belloni (2000)

IFES	Número de Professores			
Ordem	1ºquartil	Mediana	3ºquartil	
k	Porte Pequeno	Porte Médio	Porte Grande	Porte muito Grande
01		#		
02			#	
03		#		
04	#			
05			#	
06				#
07	#			
08			#	
09		#		
10				#
11		#		
12				#
13		#		
14		#		
15				#
16		#		
17				#
18				
19			#	
20				#
21		#		
22		#		
23			#	
24	#			
25				#
26			#	
27	#			
28	#			
29	#			
30	#			
31	#			
32	#			
33	#			

Figura 3.1 Porte das 33 Instituições de Ensino Superior do Banco de Referência

Graduação aplicados em 1998. A subdivisão dos dois primeiros produtos em suas partições tradicionais (formados na graduação e na pós-graduação; artigos publicados no país e no exterior) também não se mostrou estatisticamente significativa. Ademais, em seu relatório de tese, esse pesquisador mostrou que suas fontes de dados não permitem considerar dados monetários, nem variáveis representativas das atividades de extensão e gestão. Nesse contexto, BELLONI (2000) construiu uma fronteira de produção representada pela função:

$$m_F \cdot FORMADOS + m_A \cdot ARTIGOS + m_Q \cdot IQGRAD = n_{PR} \cdot PROFESSORES - M,$$

na qual m_F , m_A , m_Q e n_{PR} são os multiplicadores de que trata esta dissertação e M um indicador dos retornos de escala. Tais multiplicadores são ponderadores utilizados na agregação dos insumos e produtos observados no cálculo de produtividade relativa e podem ser interpretados como medidas da importância relativa que cada instituição de ensino dá aos seus insumos e produtos, uma vez que eles são proporcionais aos inversos das taxas de substituição entre os insumos e das taxas de troca entre os produtos.

Neste capítulo, descreve-se a aplicação dos modelos CCR Básico e BCC Básico ao Banco de Dados de Referência, que foi realizada com a finalidade de ser criado um marco ilustrativo de comparação das formas de estabelecer limites nos Modelos DEA de Dyson & Thanassoulis, de Wong & Beasley e de Ali, Cook & Seiford.

3.1 A Aplicação do Modelo CCR Básico

Os resultados dessa aplicação estão na tabela 3.2. Nesse caso, cada instituição de ensino está sendo avaliada sob a hipótese de serem constantes os retornos a mudanças na escala de operação: portanto, toda instituição pode alcançar a produtividade máxima observada, independentemente de seu porte.

Tabela 3.2 Modelo CCR Básico: Medida de Ineficiência e Multiplicadores Ótimos

IFES	Medida de Ineficiência	Multiplicadores Ótimos			
_Ordem		Insumo	Produtos		
k	I^*	n_{PR}^*	\hat{m}_F^*	\hat{m}_A^*	\hat{m}_Q^*
01	1,6685	1,96	1	1	1
02	1,2377	1,96	1	1	1
03	1,1201	1,96	1	1	1
04	1,2853	1,96	1	1	1
05	1,6395	1,96	1	1	1
06	1,0086	1,96	1	1	1
07	1,3081	1,96	1	1	1
08	1,1579	1,96	1	1	1
09	2,4226	1,96	1	1	1
10	1,4797	1,96	1	1	1
11	1,3097	1,96	1	1	1
12	3,7435	1,96	1	1	1
13	1,2645	1,96	1	1	1
14	1,8765	1,96	1	1	1
15	2,2662	1,96	1	1	1
16	1,6609	1,96	1	1	1
17	1,2658	1,96	1	1	1
18	1,1899	1,96	1	1	1
19	1,6840	1,96	1	1	1
20	1,6045	1,96	1	1	1
21	1,3334	1,96	1	1	1
22	1,4426	1,96	1	1	1
23	1,6488	1,96	1	1	1
24	# 1,0000	1,96	1	1	1
25	1,1442	1,96	1	1	1
26	1,4136	1,96	1	1	1
27	1,0341	1,96	1	1	1
28	1,5522	1,96	1	1	1
29	1,4477	1,96	1	1	1
30	1,0466	1,96	1	1	1
31	1,2881	1,96	1	1	1
32	1,1238	1,96	1	1	1
33	1,1272	1,96	1	1	1
Mínimo	1,0000	1,96	1	1	1
1ºquartil	1,1511	1,96	1	1	1
Média	1,4786	1,96	1	1	1
Mediana	1,3097	1,96	1	1	1
3ºquartil	1,6441	1,96	1	1	1
Máximo	3,7435	1,96	1	1	1

instituição eficiente

Observa-se que:

- A IFES24 é a única eficiente, sendo, portanto, a única referência para as demais.
- Não há multiplicador igual a zero, característica necessária para assegurar que os produtos e o insumo selecionados são relevantes para todas as 33 instituições em avaliação.
- A fronteira de produção é representada pela função:

$$1.00*FORMADOS + 1.00*ARTIGOS + 1.00* IQGRAD = 1.96*PROFESSORES$$

- As taxas de troca entre produtos são todas iguais a 1; assim, na eficiência, todas as instituições de ensino estariam dispostas a trocar um formado por um artigo ou, alternativamente por uma unidade no indicador de qualidade.
- A produtividade média desse conjunto de instituições pode crescer quase 50 % ; metade delas pode ter suas produtividades aumentadas em pelo menos 30%.
- As produtividades estimadas das IFESs 09, 12, e 15 são excessivamente baixas quando comparadas às produtividades das demais instituições, possivelmente como reflexo da adoção equivocada da hipótese de retornos constantes à escala.

3.2 A Aplicação do Modelo BCC Seminal

Os resultados desta aplicação estão na tabela 3.3. Nesse modelo, a eficiência de cada instituição de ensino está sendo avaliada sob a hipótese de retornos de escala variáveis, demonstrada por Belloni (2000) como sendo a mais adequada para estudos no Banco de Dados de Referência. Recorde-se que, nesse modelo, não é estabelecida a restrição de serem positivos todos os multiplicadores dos insumos e dos produtos. Observa-se que:

- Há seis instituições de ensino eficientes: as IFESs 06, 18, 23, 24, 25 e 27, que são referências para as demais.
- Há multiplicador de produto igual a zero para algumas instituições, fato que contraria a hipótese desse produto ser relevante para todas as instituições.

Tabela 3.3 Modelo BCC Seminal: Medida de Ineficiência, Indicador de Retorno de Escala, Multiplicadores Ótimos e Excessos de Produtos^(@)

IFES	Medida de Ineficiência	Indicador de Retorno de Escala	Multiplicadores * 10.000				Excesso de Produtos		
Ordem			Insumo	Produtos					
k	I^*	M^*	n_{PR}^*	m_F^*	m_A^*	m_Q^*	s_F^{+*}	s_A^{+*}	s_{IQ}^{+*}
01	1,6616	0,016	1564	133				207	6
02	1,1390	0,317	61	56		401		281	
03	1,1139	0,009	98	77				158	4
04	1,2644	0,509	98	89		646		338	
05	1,5258	0,460	88	81		583		453	
06	# 1,0000	0,005	55	43					
07	1,3071	0,017	182	142				305	5
08	1,0691	0,256	49	45		325		62	
09	1,6120	1,372	23			2562	226	282	
10	1,1352	0,825	15	11		1405		250	
11	1,0130	0,831	16	11		1415		340	
12	1,3017	1,245	2			1934	1564	770	
13	1,0483	0,923	15			1723	169	325	
14	1,6306	1,393	26	19		2373		391	
15	1,8237	1,739	3			2701	21	661	
16	1,5121	1,260	24	17		2146		400	
17	1,0394	0,768	14	10		1308		227	
18	# 1,0000	0,602	12	8		1025			
19	1,4702	1,097	21	14		1869		601	
20	1,0015	0,960	1			1490	546	18	
21	1,0802	0,871	17	17		1483		245	
22	1,3346	1,106	21	14		1884		474	
23	# 1,0000	0,977	1			1517			
24	# 1,0000	0,885	17	12		1508			
25	# 1,0000	0,302	25	23		458			
26	1,2702	0,535	41	41		810		179	
27	# 1,0000	-0,070	312			339			
28	1,5217	-0,084	376			4090	24	138	
29	1,3974	-0,685	362	200				71	1
30	1,0271	-0,511	266		327		370		1
31	1,2779	-0,055	244			2664	17	223	
32	1,1183	-0,045	198			2612	152	285	
33	1,1187	-0,048	212			2310	193	249	
Mínimo	1,0000	-0,685	1						
1º quartil	1,0394	0,007	16			370		40	
Média	1,2521	0,539	135	32	10	1321	99	240	0,5
Mediana	1,1390	0,535	26	12		1415		245	
3º quartil	1,4702	0,969	190	44		2040	22	339	
Máximo	1,8237	1,739	1564	200	327	4090	1564	770	6

instituições eficientes

@ os multiplicadores e os excessos de produtos não explicitados são iguais a zero.

- O produto ARTIGOS somente é relevante para a IFES 30.
- Os multiplicadores, e consequentemente, as taxas de troca de produtos e a taxa de substituição do insumo, variam muito de instituição para instituição. Tal fato indica que as 33 instituições avaliadas não podem ser consideradas semelhantes relativamente à comparação de suas produtividades máximas alcançáveis, visto que elas não balizam suas decisões por taxas de substituição e taxas de troca próximas, como deveria ser, caso elas fossem semelhantes.
- A ineficiência total desse elenco de instituições não é tão grande quanto àquela estimada pelo Modelo CCR Básico, visto que agora: (i) o crescimento da produtividade média é próximo de 25%; (ii) menos da metade das instituições consegue aumentar sua produtividade acima de 14%; (iii) não chega a dois o maior aumento de produtividade possível
- A instituição de pior desempenho é a IFES15, cuja medida de ineficiência é 1,82. Porém, a IFES12 é aquela que tem os maiores excessos de produtos, visto que poderia formar 1.564 alunos e publicar 770 ARTIGOS, além da ampliação máxima de 30% de todos os seus produtos.

Claramente, o modelo BCC seminal, com alguns multiplicadores iguais a zero, está gerando avaliações não condizentes com a realidade das instituições. Tal fato reforça a necessidade teórica de ser estabelecida a restrição de todos os multiplicadores serem positivos.

3.3 A Aplicação do Modelo BCC Básico

Nesse modelo todos os multiplicadores são positivos. As tabelas 3.4 a 3.6 apresentam resultados da sua aplicação ao Banco de Dados de Referência. A Figura 3.2 ilustra pictoricamente a fronteira de produção determinada por esse Modelo.

A Expansão Radial e a Meta Global da tabela 3.6 são planos eficientes, segundo Farrell e Koopmans respectivamente, e definem mudanças nas quantidades de produtos que aumentam ao máximo a produtividade das instituições ineficientes, quando medidas com os correspondentes multiplicadores ótimos. A

Tabela 3.4 Modelo BCC Básico: Medida de Ineficiência, Indicador de Retorno de Escala; Multiplicadores Ótimos e Excessos de Produtos. (@)

IFES Ordem	Medida de Ineficiência	Indicador de Retorno de Escala	Multiplicadores Ótimos				Excessos		
			Insumo	Produtos			Produtos		
k	I^*	M^*	n_{PR}^*	m_F^*	m_A^*	m_Q^*	s_F^{+*}	s_A^{+*}	s_{IQ}^{+*}
01	1,6615	692	3,05	2,63	1	1		207	6
02	1,1390	692	3,05	2,63	1	1		281	
03	1,1139	692	3,05	2,63	1	1		158	4
04	1,2644	692	3,05	2,63	1	1		338	
05	1,5257	692	3,05	2,63	1	1		453	
06	# 1,0000	692	3,05	2,63	1	1			
07	1,3071	692	3,05	2,63	1	1		305	5
08	1,0690	692	3,05	2,63	1	1		62	
09	1,6120	11424	1,94	1	1	193	226	282	
10	1,1359	11424	1,94	1	1	193		250	
11	1,0129	11424	1,94	1	1	193		340	
12	1,3016	11424	1,94	1	1	193	1564	770	
13	1,0483	11424	1,94	1	1	193	169	325	
14	1,6305	11424	1,94	1	1	193		391	
15	1,8236	11424	1,94	1	1	193	21	661	
16	1,5121	11424	1,94	1	1	193		400	
17	1,0394	11424	1,94	1	1	193		227	
18	# 1,0000	11424	1,94	1	1	193			
19	1,4702	11424	1,94	1	1	193		601	
20	1,0015	11424	1,94	1	1	193	546	18	
21	1,0802	11424	1,94	1	1	193		245	
22	1,3345	11424	1,94	1	1	193		474	
23	# 1,0000	11424	1,94	1	1	193			
24	# 1,0000	419	1,34	1	1	1			
25	# 1,0000	649	2,72	2,33	1	1			
26	1,2701	649	2,72	2,33	1	1		179	
27	# 1,0000	-500	2,71	1	1	1			
28	1,5216	-500	2,71	1	1	1	24	138	
29	1,3974	-500	2,71	1	1	1		71	1
30	1,0270	-500	2,71	1	1	1	370		1
31	1,2778	-500	2,71	1	1	1	17	223	
32	1,1182	-500	2,71	1	1	1	152	285	
33	1,1187	-500	2,71	1	1	1	193	249	
Mínimo	1,0000	-500	1,34	1	1	1			
1º quartil	1,0200	534	1,94	1	1	1		40	
Média	1,2368	5306	2,4	1,48	1	88,27	99	240	1
Mediana	1,1359	692	2,71	1	1	1		245	
3º quartil	1,4338	11424	2,89	2,48	1	193	22	339	
Máximo	1,8236	11424	3,05	2,63	1	193	1564	770	6

@ Os excessos de produtos não explicitados são iguais a zero # Instituições eficientes

Tabela 3.5 Modelo BCC Básico: DMUs de Referência; Consumos Mínimos e Taxas de Troca de Produtos

IFES Ordem	Referências	Consumos Mínimos			Taxas de Troca de Produtos		
k		$\frac{m_P^*}{n_{PR}^*}$	$\frac{m_A^*}{n_{PR}^*}$	$\frac{m_Q^*}{n_{PR}^*}$	$\frac{m_P^*}{m_A^*}$	$\frac{m_P^*}{m_Q^*}$	$\frac{m_A^*}{m_Q^*}$
01	06, 24 e 25	0,86	0,33	0,33	2,63	2,63	1
02	06, 24 e 25	0,86	0,33	0,33	2,63	2,63	1
03	06, 24 e 25	0,86	0,33	0,33	2,63	2,63	1
04	06, 24 e 25	0,86	0,33	0,33	2,63	2,63	1
05	06, 24 e 25	0,86	0,33	0,33	2,63	2,63	1
06	# 06	0,86	0,33	0,33	2,63	2,63	1
07	06, 24 e 25	0,86	0,33	0,33	2,63	2,63	1
08	06, 24 e 25	0,86	0,33	0,33	2,63	2,63	1
09	18, 23 e 24	0,52	0,52	99,48	1	Θ	Θ
10	18, 23 e 24	0,52	0,52	99,48	1	Θ	Θ
11	18, 23 e 24	0,52	0,52	99,48	1	Θ	Θ
12	18, 23 e 24	0,52	0,52	99,48	1	Θ	Θ
13	18, 23 e 24	0,52	0,52	99,48	1	Θ	Θ
14	18, 23 e 24	0,52	0,52	99,48	1	Θ	Θ
15	18, 23 e 24	0,52	0,52	99,48	1	Θ	Θ
16	18, 23 e 24	0,52	0,52	99,48	1	Θ	Θ
17	18, 23 e 24	0,52	0,52	99,48	1	Θ	Θ
18	# 18	0,52	0,52	99,48	1	Θ	Θ
19	18, 23 e 24	0,52	0,52	99,48	1	Θ	Θ
20	18, 23 e 24	0,52	0,52	99,48	1	Θ	Θ
21	18, 23 e 24	0,52	0,52	99,48	1	Θ	Θ
22	18, 23 e 24	0,52	0,52	99,48	1	Θ	Θ
23	# 18, 23 e 24	0,52	0,52	99,48	1	Θ	Θ
24	# 24	0,75	0,75	0,75	1	1	1
25	# 25	0,86	0,37	0,37	2,33	2,33	1
26	18, 24 e 25	0,86	0,37	0,37	2,33	2,33	1
27	# 27	0,37	0,37	0,37	1	1	1
28	24 e 27	0,37	0,37	0,37	1	1	1
29	24 e 27	0,37	0,37	0,37	1	1	1
30	24 e 27	0,37	0,37	0,37	1	1	1
31	24 e 27	0,37	0,37	0,37	1	1	1
32	24 e 27	0,37	0,37	0,37	1	1	1
33	24 e 27	0,37	0,37	0,37	1	1	1
Mínimo		0,37	0,33	0,33	1	Θ	Θ
1ºquartil		0,52	0,35	0,35	1	Θ	Θ
Média		0,60	0,44	45,42	1,47	1,03	0,55
Mediana		0,52	0,37	0,37	1	1	1
3ºquartil		0,86	0,52	99,48	2,48	2,48	1
Máximo		0,86	0,75	99,48	2,63	2,63	1

(Θ) =0,005

Tabela 3.6 Modelo BCC Básico: Planos de Operação Observados e Metas Eficientes

IFES Ordem	Planos Observados				Expansão Radial			Meta Global		
k	PROFESSORES	FORMADOS	ARTIGOS	IQGRAD	FORMADOS	ARTIGOS	IQGRAD	FORMADOS	ARTIGOS	IQGRAD
01	970	754	55	27,3	1.253	91	45,36	1.253	299	51,49
02	1.357	1.422	197	51,83	1.620	224	59,03	1.620	505	59,03
03	1.127	1.305	85	39,34	1.454	95	43,82	1.454	253	47,34
04	774	781	43	46,42	988	54	58,69	988	393	58,69
05	1.211	958	15	38,61	1.462	23	58,91	1.462	476	58,91
06	#	1.826	2.348	47	28,86	2.348	47	28,86	47	28,86
07		709	703	54	41	919	71	53,59	376	58,39
08		1.657	1.856	377	50,3	1.984	403	53,77	465	53,77
09		1.066	478	46	39,03	771	74	62,92	356	62,92
10		1.952	1.711	336	57,66	1.944	382	65,50	632	65,50
11		1.136	1.125	72	61,78	1.140	73	62,58	413	62,58
12		2.690	932	88	51,7	1.213	115	67,29	884	67,29
13		827	716	47	58,01	751	49	60,81	375	60,81
14		884	611	6	37,32	996	10	60,85	401	60,85
15		2.890	1.654	170	37,02	3.016	310	67,51	971	67,51
16		1.036	809	54	40,2	1.223	82	60,79	482	60,79
17		1.829	1.874	421	61,64	1.948	438	64,07	664	64,07
18	#	3.424	3.732	1.202	68,09	3.732	1.202	68,09	1.202	68,09
19		1.758	1.354	70	42,8	1.991	103	62,92	704	62,92
20		2.583	2.088	819	67,08	2.091	820	67,18	838	67,18
21		1.246	1.212	213	57,85	1.309	230	62,49	475	62,49
22		1.070	962	23	45,48	1.284	31	60,69	505	60,69
23	#	1.406	1.106	329	65,91	1.106	329	65,91	329	65,91
24	#	670	869	387	59,43	869	387	59,43	387	59,43
25	#	2.748	3.115	806	61,65	3.115	806	61,65	806	61,65
26		1.636	1.501	329	47,86	1.906	418	60,79	597	60,79
27	#	343	278	122	29,42	278	122	29,42	122	29,42
28		427	267	34	24,4	406	52	37,13	190	37,13
29		575	499	171	35,23	697	239	49,23	310	50,71
30		579	326	305	49,07	335	313	50,39	313	51,07
31		545	490	49	37,53	626	63	47,96	286	47,96
32		586	505	30	46,25	565	34	51,72	319	51,72
33		550	410	36	43,28	459	40	48,42	290	48,42
Mínimo	343	267	6	24	278	10	28,86	278	47	28,86
1º quartil	690	558	47	38	761	53	49,81	894	312	51,28
Média	1.336	1.174	213	47	1.388	234	56,30	1.487	475	56,80
Mediana	1.127	958	85	46	1.223	103	60,69	1.253	401	60,69
3º quartil	1.792	1.578	329	58	1.946	355	62,92	1.966	614	62,92
Máximo	3.424	3.732	1.202	68	3.732	1.202	68,09	3.732	1.202	68,09

#instituições eficientes

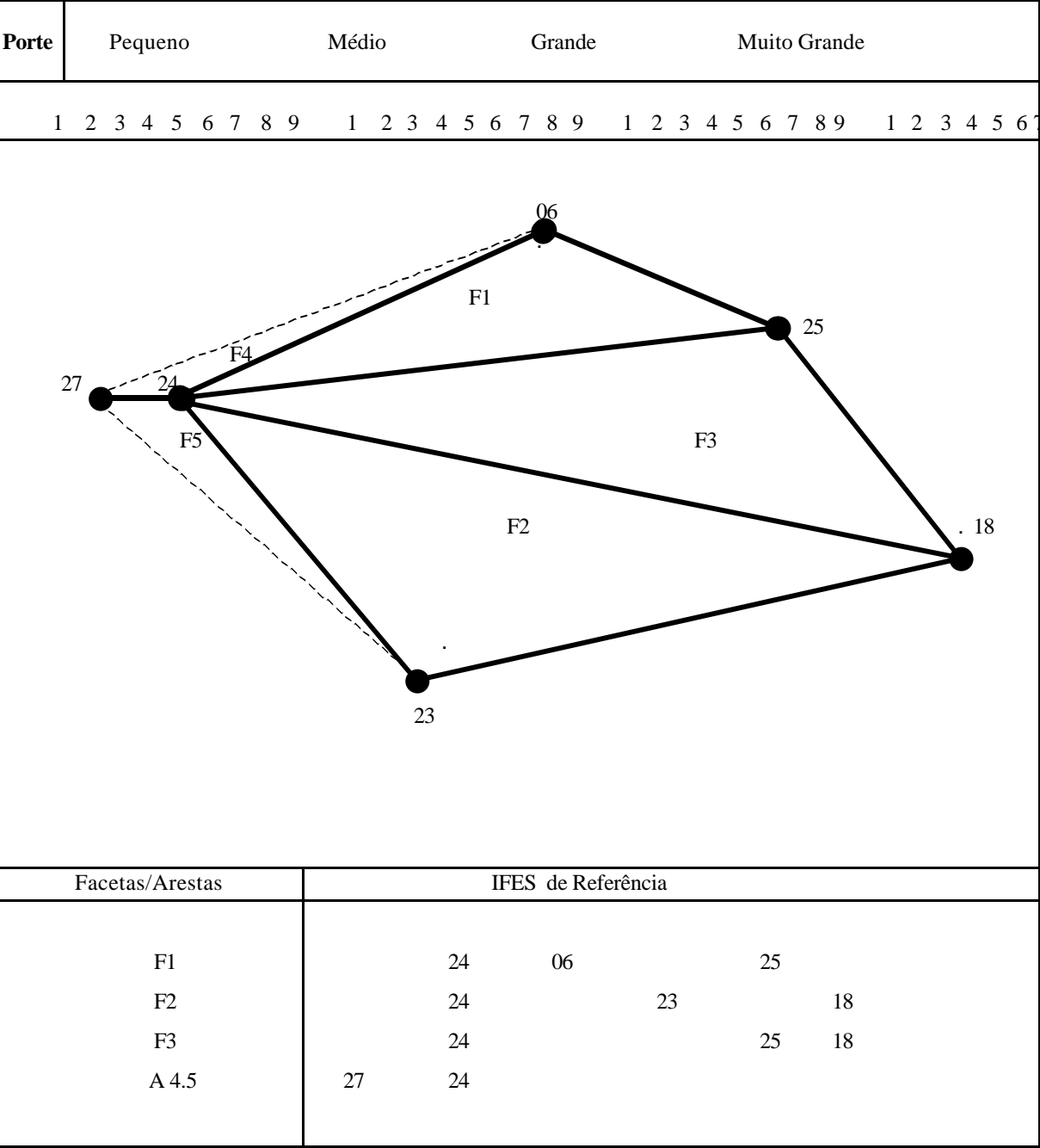


Figura 3.2 Modelo BCC Básico – Fronteira de Produção Empírica

meta global de cada plano ineficiente é computada em duas etapas. Primeiro, com a expansão radial do plano de operação observado na direção da fronteira, através da multiplicação da produção observada pelo indicador de ineficiência I^* : gera-se, assim, o plano Farrell eficiente transcrito na coluna “Expansão Radial”. Por sua vez, a Meta Global resulta da agregação dos “Excessos de Produtos” da tabela 3.4 à “Expansão Radial”: gera-se, assim, um plano Koopmans eficiente.

Observa-se que:

- As instituições eficientes (06, 18, 23, 24, 25, 27) são as mesmas identificadas na aplicação do modelo BCC Seminal.
- Como esperado, não há multiplicador igual a zero.
- A análise dos multiplicadores permite identificar quatro classes de instituições ineficientes com comportamento semelhante, cada classe agrupando todas as instituições com o mesmo conjunto de multiplicadores ótimos. Tal fato indica que a fronteira de produção construída por esse Modelo é definida por três facetas e uma aresta de eficiência, caracterizando tais classes. Tais facetas e arestas estão ilustradas na Figura 3.2 e são:

$$F.1- \quad 2.63*FORMADOS + 1.00*ARTIGOS + 1.00*IQGRAD = 3.05*PROFESSOR - 692$$

$$F.2- \quad 1.00*FORMADOS + 1.00*ARTIGOS + 193*IQGRAD = 1.94*PROFESSOR - 11424$$

$$F.3- \quad 2.33*FORMADOS + 1.00*ARTIGOS + 1.00*IQGRAD = 2.72*PROFESSOR - 649$$

$$A 4.5 \quad 1.00*FORMADOS + 1.00*ARTIGOS + 1.00*IQGRAD = 2.71*PROFESSOR + 500$$

As instituições de cada classe (faceta/aresta) podem ser consideradas semelhantes para efeito de avaliação, uma vez que multiplicadores ótimos idênticos indicam valoração idêntica para os insumos e produtos e refletem semelhança nos ambientes sócio-econômico, culturais em que tais instituições estão inseridas.

O Modelo BCC Básico revela-se mais adequado que os dois anteriores para avaliar a eficiência técnica das 33 instituições de ensino selecionadas, visto que: (i) ele contempla retornos de escala variáveis, mais compatível com as características do Banco de Dados de Referência, como mostrado por BELLONI (2000), e, (ii) os

três produtos e o único insumo selecionados são relevantes para as 33 instituições de ensino, pois todos os multiplicadores são positivos. Assim sendo, a avaliação realizada pelo Modelo BCC Básico foi adotada como referência na ilustração dos Modelos de Dyson & Thanassoulis, Wong & Beasley e Ali, Cook & Seiford para estabelecer limitações para os multiplicadores.

Todavia, a enorme variabilidade dos “consumos mínimos”²⁰ aponta indícios fortes da fronteira de produção construída com o Modelo BCC Básico ser inconsistente com a realidade dos contextos sócio-econômicos e culturais das 33 instituições analisadas. Essa inconsistência também é observada na enorme variabilidade das taxas de troca entre produtos que configuram relações de indiferenças na troca dos produtos mostrados nas tabelas 3.4 e 3.5. Observe que m_F^*/m_A^* varia de 1,00 a 2,63; que m_F^*/m_Q^* varia de 0,005 a 2,63; e, que m_A^*/m_Q^* varia de 0,005 a 1,00. Como m_F^*/m_A^* varia de 1,00 e 2,63, há, então, instituições eficientes indiferentes entre gerar um artigo ou um formado, enquanto há outras indiferentes entre gerar um formado ou 2,63 artigos. Essa inconsistência na eficiência também é observada na razão entre os multiplicadores m_F^*/m_Q^* e m_A^*/m_Q^* . Tais constatações sugerem a necessidade de serem estabelecidos limites para os valores dos multiplicadores.

²⁰ De acordo com a interpretação dada por Dyson & Thanassoulis, quando há um único insumo.

4 MODELOS DEA COM LIMITAÇÕES NOS MULTIPLICADORES

Este capítulo trata da aplicação ilustrativa dos Modelos DEA propostos por Dyson & Thanassoulis (1988); Ali, Cook & Seiford (1991) e Wong & Beasley (1990) ao Banco de Dados de Referência construído por Belloni (2000).

4.1 Aplicação do Modelo DEA-DT de Dyson & Thanassoulis

Este modelo é o mais elementar de todos e aplica-se somente a planos de operação com um único insumo. Os limites impostos aos multiplicadores baseiam-se nas razões entre os multiplicadores ótimos dos produtos e o multiplicador ótimo do insumo, tendo em vista que cada razão pode ser interpretada como a quantidade mínima de insumo necessária para gerar uma unidade do produto. Em estudos reais, tais quantidades mínimas são determinadas, ou pelo menos validadas, através da técnica de consenso de especialistas. Todavia, o elevado custo desse processo e o caráter ilustrativo desta dissertação justificam a opção de empregar um processo mais simples nesta aplicação²¹.

A tabela 3.5 mostra que, no Modelo BCC Básico, $\bar{m}_I^*/\bar{n}_{PR}^*$ varia de 0,37 e 0,86; $\bar{m}_A^*/\bar{n}_{PR}^*$ de 0,33 a 0,75; e $\bar{m}_Q^*/\bar{n}_{PR}^*$ de 0,33 a 99,48. Por outro lado, a tabela 3.3 mostra que, no Modelo DEA Seminal, essas razões variam de zero a 1,00; de zero a 1,23 e de zero a quase 1.500, respectivamente. Tal variabilidade no consumo mínimo, principalmente na que diz respeito ao Indicador de Qualidade, dificulta o estabelecimento de limites para essas razões a partir dos resultados do Modelo BCC. Por sua vez, a tabela 3.2 aponta que, no Modelo CCR Básico, $\bar{m}_I^*/\bar{n}_{PR}^* = \bar{m}_A^*/\bar{n}_{PR}^* = \bar{m}_Q^*/\bar{n}_{PR}^* = 1/1,96 \cong 0,5$, indicando ser necessária uma unidade de insumo (professor) para gerar, alternativamente, duas unidades de qualquer insumo (dois formados, dois artigos ou dois pontos do Indicador de Qualidade), para toda e qualquer DMU. Haja vista que a única restrição imposta no Modelo CCR Básico é dos multiplicadores não serem negativos, optou-se, tendo em vista o caráter ilustrativo desta aplicação, por adotar as seguintes restrições para os consumos

mínimos necessários para gerar uma unidade de produto (isto é, formar um aluno, publicar um artigo, ou aumentar de uma unidade o Indicador de Qualidade).

$$0,25 \leq \frac{m_f}{n_{Pr}} \leq 0,75 \quad ; \quad 0,25 \leq \frac{m_Q}{n_{Pr}} \leq 0,75 \quad ; \quad 0,25 \leq \frac{m_A}{n_{Pr}} \leq 0,75$$

A Figura abaixo transcreve o Modelo Dyson & Thanassoulis empregado nesta aplicação.

FORMA DO ENVELOPAMENTO

$$F^* = \max \mathbf{I} + \mathbf{e}(s_F^+ + s_A^+ + s_{IQ}^+ + s_{PR}^-)$$

sujeito a

$$\mathbf{I} y_{F0} - \sum m_f y_{Fn} - n_F^+ + r_F^+ + s_F^+ = 0,$$

$$\mathbf{I} y_{A0} - \sum m_A y_{An} - n_A^+ + r_A^+ + s_A^+ = 0,$$

$$\mathbf{I} y_{IQ0} - \sum m_{IQ} y_{IQn} - n_{IQ}^+ + r_{IQ}^+ + s_{IQ}^+ = 0,$$

$$x_n z_n + 0,25n_F^+ + 0,25n_A^+ + 0,25n_{IQ}^+ - 0,75r_F^+ - 0,75r_A^+ - 0,75r_{IQ}^+ + s_{PR}^- = x_0,$$

$$\mathbf{I} \in R; \quad z_n \geq 0, \quad n = 1, \dots, 33$$

$$\sum_{n=1}^{33} z_n = 1$$

$$s_F^+ \geq 0, \quad s_A^+ \geq 0, \quad s_{IQ}^+ \geq 0, \quad s_{PR}^- \geq 0,$$

$$r_F^+ \geq 0, \quad r_A^+ \geq 0, \quad r_{IQ}^+ \geq 0,$$

$$n_F^+ \geq 0, \quad n_A^+ \geq 0, \quad n_{IQ}^+ \geq 0,$$

$$\mathbf{e} > 0, \text{ não arquimediano}$$

Figura 4.1 Forma do Envelopamento do Modelo BCC-DT

A tabela 4.1 apresenta as características da fronteira de produção nessas condições. As tabelas 4.2 e 4.3 apresentam resultados da avaliação realizada por esse Modelo DEA. A Figura 4.2 ilustra pictoricamente a correspondente fronteira de produção empírica.

²¹ E também nas demais aplicações relatadas neste capítulo.

Diretamente associadas ao estabelecimento de limites para os multiplicadores, as seguintes observações merecem destaque especial.

- i. Há apenas três organizações eficientes²², as DMU 18, 24 e 27²³. Pode-se observar que a DMU 18 é identificada como uma universidade de porte muito grande, diversificada e com enfoque na pós-graduação e pesquisa; a DMU 24 como uma universidade de porte médio, especializada e com enfoque na pós-graduação; e a DMU 27 como uma universidade de porte pequeno, especializada e com ênfase na graduação; servem de referência para as demais DMUs .
- ii. As DMU 06, 23 e 25²⁴, que eram eficientes no Modelo BCC Básico, deixam de sê-lo. Na avaliação realizada por esse último modelo, a DMU 23 valorizava excessivamente o Indicador de Qualidade ($\bar{m}_{IQ}^*/\bar{n}_{PR}^* = 99,48$) relativamente a FORMADOS ($\bar{m}_F^*/\bar{n}_{PR}^* = 0,52$) e a ARTIGOS ($\bar{m}_A^*/\bar{n}_{PR}^* = 0,52$). As outras duas DMUs davam valor muito grande a FORMADOS ($\bar{m}_F^*/\bar{n}_{PR}^* = 0,86 > 0,75$) frente a ARTIGOS ($\bar{m}_A^*/\bar{n}_{PR}^* = 0,33$) e ao Indicador de Qualidade ($\bar{m}_{IQ}^*/\bar{n}_{PR}^* = 0,33$).
- iii. Das DMUs ineficientes, tem-se duas (DMU 06 e 25) que podem crescer em, até, 10%; uma (DMU 08) pode crescer entre 10% e 20%; onze (DMU 02, 03, 04, 07, 10, 11, 17, 20, 21, 29 e 30) podem expandir sua produção entre 20% e 50%; doze (DMU 01, 05, 13, 16, 19, 22, 23, 26, 28, 31, 32 e 33) podem crescer entre 50% e 100%, e, quatro (DMU 09, 12, 14 e 15) podem crescer mais que 100%.

²² A partir deste capítulo, a exposição referir-se-á a DMU e não a IFES, de modo a destacar o caráter geral dos resultados das aplicações.

²³ No caso particular do Banco de Dados de Referência, Belloni (2000) identifica a DMU 18 como uma universidade de porte muito grande, diversificada e com enfoque na pós-graduação e pesquisa; a DMU 24 como uma universidade de porte médio, especializada e com enfoque na pós-graduação e pesquisa; e a DMU 27 como uma universidade de porte muito pequeno, especializada e com ênfase na graduação.

²⁴ No caso particular do Banco de Dados de Referência, Belloni (2000) identifica a DMU 06 como uma universidade de porte grande com ênfase na graduação; a DMU 23 como uma universidade de porte grande com ênfase na pós-graduação; a DMUs 25 como uma universidade de porte muito grande, com ênfase semelhante à graduação e à pós-graduação.

Tabela 4.1 Modelo de Dyson & Thanassoulis: Medida de Ineficiência, Indicador de Retorno de Escala; Multiplicadores Ótimos e Excessos de Produto.

DMU	Medida de Ineficiência	Indicador de Retorno de Escala	Multiplicadores Ótimos				Excessos de Produto					
k	I^*	M^*	n_{PR}^*	m_F^*	m_A^*	m_{IQ}^*	n_F^*	r_F^*	n_A^*	r_A^*	n_{IQ}^*	r_{IQ}^*
01	1,8143	373	4	3	1	1	499	287			10	
03	1,2084	373	4	3	1	1	708	284			12	
06	1,0783	373	4	3	1	1	1.663	336			28	
02	1,2818	492	4	3	1	3	954	134				7
04	1,4209	492	4	3	1	3	241	326				7
05	1,7759	492	4	3	1	3	832	360				9
07	1,4559	492	4	3	1	3	155	308				0
09	2,9781	492	4	3	1	3	555	250				57
11	1,3865	492	4	3	1	3	691	287				26
12	3,7025	492	4	3	1	3	2.582	61				132
13	1,6041	492	4	3	1	3	280	312				34
14	2,0647	492	4	3	1	3	393	375				18
16	1,7820	492	4	3	1	3	573	291				12
19	1,7661	492	4	3	1	3	1.522	263				16
21	1,3614	492	4	3	1	3	781	97				19
22	1,5670	492	4	3	1	3	638	351				12
24	# 1,0000	492	4	3	1	3						
08	1,1522	423	1,35	1,02	1	1,02	1.103				2	
25	1,0278	423	1,35	1,02	1	1,02	782				1	
10	1,4380	423	1,35	1,02	1	1,02	1.254					22
15	2,2973	423	1,35	1,02	1	1,02	2.918					26
17	1,2148	423	1,35	1,02	1	1,02	970					14
18	# 1,0000	423	1,35	1,02	1	1,02						
23	1,6937	423	1,35	1,02	1	1,02	414					40
26	1,5578	423	1,35	1,02	1	1,02	969					6
20	1,3031	423	1,35	1,02	1	1,02				153		22
27	# 1,0000	-500	2,71	1	1	1						
30	1,3285	-472	4	1	3	3	436			18		6
29	1,4657	-713	4	1,61	1	3			75			1
28	1,8494	-713	4	1,61	1	3			156			5
31	1,5409	-713	4	1,61	1	3			260			4
32	1,6586	-713	4	1,61	1	3			323			19
33	1,7976	-713	4	1,61	1	3			263			25
Mínimo	1,0000		1	1	1	1						
1º quartil	1,2483		3	1,02	1	1,02						
Média	1,5931		3	2,25	1,18	2,16	13	651	164	5	2	16
Mediana	1,4657		4	3	1	3		555	156			9
3º quartil	1,7790		4	3	1	3		962	300			22
Máximo	3,7025		4	3	3	3	436	2.918	375	153	28	132

Φ As folgas não explicitadas são iguais a zero. # instituições eficientes

Tabela 4.2 Modelo de Dyson & Thanassoulis: DMUs de Referência; Consumos Mínimos e Taxas de Troca de Produtos

DMU	Referências	Consumos Mínimos			Taxa de Troca entre Produtos		
k		$\frac{m_f^*}{n_{PR}^*}$	$\frac{m_A^*}{n_{PR}^*}$	$\frac{m_Q^*}{n_{PR}^*}$	$\frac{m_f^*}{m_A^*}$	$\frac{m_f^*}{m_Q^*}$	$\frac{m_A^*}{m_Q^*}$
01	24	0,75	0,25	0,25	3	3	1
03	24	0,75	0,25	0,25	3	3	1
06	24	0,75	0,25	0,25	3	3	1
02	24	0,75	0,25	0,75	3	1	0,33
04	24	0,75	0,25	0,75	3	1	0,33
05	24	0,75	0,25	0,75	3	1	0,33
07	24	0,75	0,25	0,75	3	1	0,33
09	24	0,75	0,25	0,75	3	1	0,33
11	24	0,75	0,25	0,75	3	1	0,33
12	24	0,75	0,25	0,75	3	1	0,33
13	24	0,75	0,25	0,75	3	1	0,33
14	24	0,75	0,25	0,75	3	1	0,33
16	24	0,75	0,25	0,75	3	1	0,33
19	24	0,75	0,25	0,75	3	1	0,33
21	24	0,75	0,25	0,75	3	1	0,33
22	24	0,75	0,25	0,75	3	1	0,33
24	# 24	0,75	0,25	0,75	3	1	0,33
10	24 e 18	0,75	0,74	0,75	1,02	1	0,98
15	24 e 18	0,75	0,74	0,75	1,02	1	0,98
17	24 e 18	0,75	0,74	0,75	1,02	1	0,98
18	# 18	0,75	0,74	0,75	1,02	1	0,98
23	24 e 18	0,75	0,74	0,75	1,02	1	0,98
26	24 e 18	0,75	0,74	0,75	1,02	1	0,98
20	24 e 18	0,75	0,74	0,75	0,99	0,99	1
08	24 e 18	0,75	0,74	0,75	1,01	3	2,96
25	24 e 18	0,75	0,74	0,75	1,01	3	2,96
27	# 27	0,37	0,37	0,37	1	1	1
30	24	0,25	0,75	0,75	0,33	0,33	1
29	24 e 27	0,43	0,25	0,75	1,71	1,71	1
28	24 e 27	0,43	0,25	0,75	1,61	0,54	0,33
31	24 e 27	0,43	0,25	0,75	1,61	0,54	0,33
32	24 e 27	0,43	0,25	0,75	1,61	0,54	0,33
33	24 e 27	0,43	0,25	0,75	1,61	0,54	0,33
Mínimo		0,25	0,25	0,25	0,33	0,33	0,33
1ºquartil		0,75	0,25	0,75	1,02	1	0,33
Média		0,67	0,4	0,65	2,11	1,25	0,75
Mediana		0,75	0,25	0,75	3	1	0,33
3ºquartil		0,75	0,74	0,75	3	1	1
Máximo		0,75	0,75	0,75	3	3	2,96

instituições eficientes

Tabela 4.3 Modelo Dyson & Thanassoulis: Planos de Operação Observados e Metas Eficientes

DMU	Planos de Operação Observados				Expansão Radial			Meta Global			
K	PROFESSORES	FORMADOS	ARTIGOS	IQGRAD	FORMADOS	ARTIGOS	IQGRAD	FORMADOS	ARTIGOS	IQGRAD	
01	970	754	55	27,30	1.368	100	49,53	1.867	387	59,43	
03	1.127	1.305	85	39,34	1.577	103	47,54	2.285	387	59,43	
06	1.826	2.348	47	28,86	2.532	51	31,12	4.195	387	59,43	
02	1.357	1.422	197	51,83	1.823	253	66,44	2.777	387	73,45	
04	774	781	43	46,42	1.110	61	65,96	1.351	387	72,49	
05	1.211	958	15	38,61	1.701	27	68,57	2.534	387	77,70	
07	709	703	54	41,00	1.024	79	59,69	1.178	387	59,95	
09	1.066	478	46	39,03	1.424	137	116,2	1.978	387	173,00	
11	1.136	1.125	72	61,78	1.560	100	85,66	2.251	387	111,90	
12	2.690	932	88	51,70	3.451	326	191,4	6.032	387	323,40	
13	827	716	47	58,01	1.149	75	93,06	1.428	387	126,70	
14	884	611	6	37,32	1.262	12	77,06	1.654	387	94,68	
16	1.036	809	54	40,20	1.442	96	71,64	2.014	387	83,85	
19	1.758	1.354	70	42,80	2.391	124	75,59	3.914	387	91,74	
21	1.246	1.212	213	57,85	1.650	290	78,76	2.431	387	98,08	
22	1.070	962	23	45,48	1.507	36	71,27	2.146	387	83,11	
24	#	670	869	387	59,43	869	387	59,43	869	387	59,43
08	1.657	1.856	377	50,30	2.139	434	57,96	3.242	434	59,93	
25	2.748	3.115	806	61,65	3.202	828	63,37	3.984	828	64,12	
10	1.952	1.711	336	57,66	2.460	483	82,92	3.714	483	105,40	
15	2.890	1.654	170	37,02	3.800	391	85,05	6.718	391	110,60	
17	1.829	1.874	421	61,64	2.277	511	74,88	3.247	511	89,01	
18	#	3.424	3.732	1.202	68,09	3.732	1.202	68,09	3.732	1.202	68,09
23	1.406	1.106	329	65,91	1.873	557	111,60	2.288	557	151,90	
26	1.636	1.501	329	47,86	2.338	513	74,56	3.308	513	80,78	
20	2.583	2.088	819	67,08	2.721	1067	87,41	2.721	1.220	109,80	
27	#	343	278	122	29,42	278	122	29,42	278	122	29,42
29	575	499	171	35,23	731	251	51,64	731	325	52,44	
30	579	326	305	49,07	433	405	65,19	869	423	70,95	
28	427	267	34	24,40	494	63	45,13	494	219	49,87	
31	545	490	49	37,53	755	76	57,83	755	336	62,01	
32	586	505	30	46,25	838	50	76,71	838	373	95,58	
33	550	410	36	43,28	737	65	77,80	737	328	102,90	
Mínimo	343	267	6	24,40	278	12	29,42	278	122	29,42	
1ºquartil	690	558	47	38,07	946	70	58,70	1.024	387	59,94	
Média	1.336	1.174	213	46,95	1.717	281	73,29	2.381	450	91,23	
Mediana	1.127	958	85	46,25	1.560	124	71,27	2.251	387	80,78	
3ºquartil	1.792	1.578	329	57,93	2.365	420	80,84	3.277	429	104,10	
Máximo	3.424	3.732	1.202	68,09	3.800	1202	191,40	6.718	1.220	323,4	

instituições eficientes

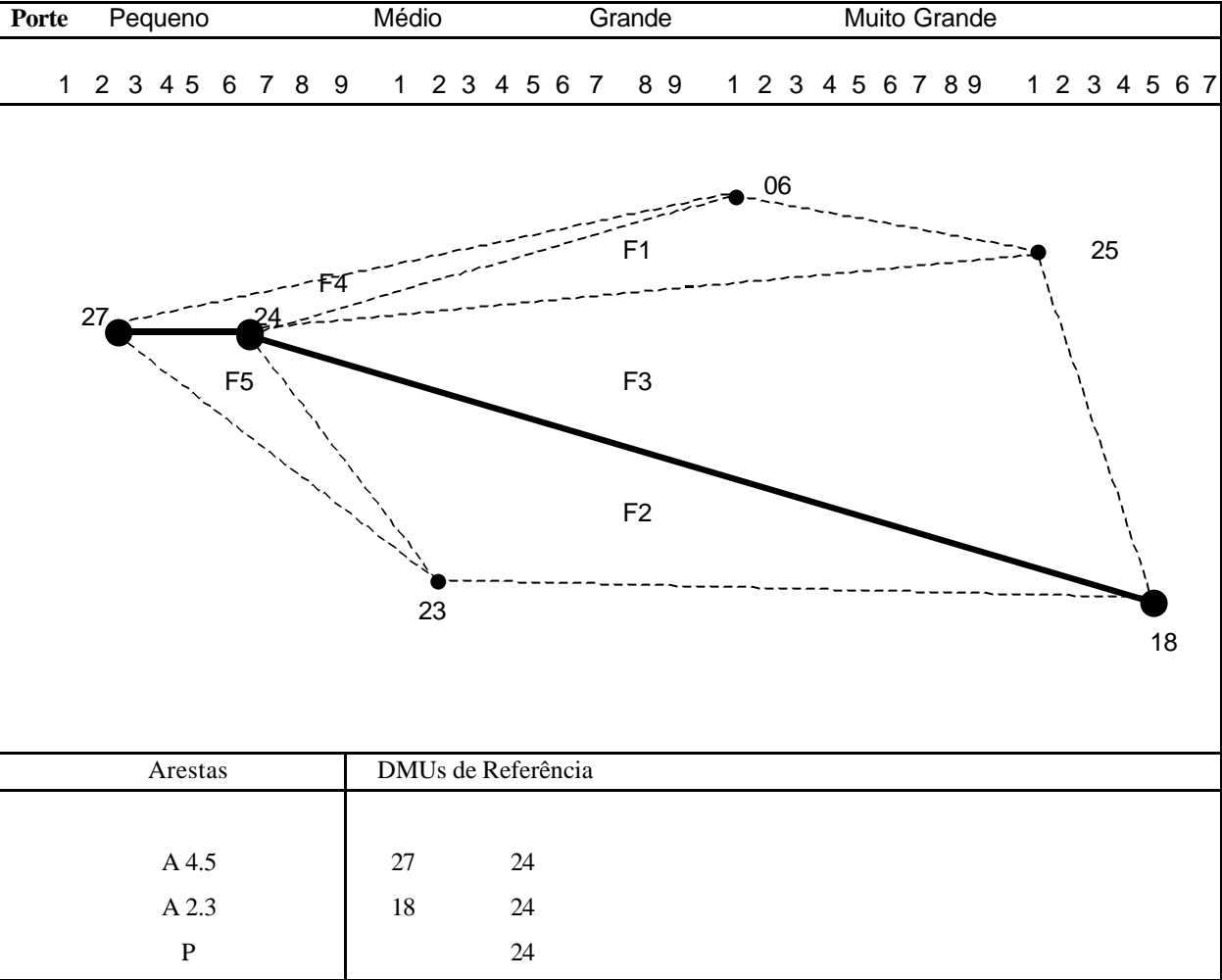


Figura 4.2 Modelo DEA de Dyson & Thanassoulis: Fronteira de Produção Empírica

iv. Há duas arestas de eficiência e uma organização de convergência:

- A aresta 4.5 definida pelas DMU 24 e 27 comporta universidades de porte pequeno e com ênfase na graduação, isto é, o locus das organizações pequenas e caracterizada pela equação:

$$1,71 \text{ FORMADOS} + 1,00 \text{ ARTIGOS} + 1,00 \text{ IQGRAD} = 4,00 \text{ PROFESSORES} + 713$$

na qual projetam-se as DMU 28, 29, 31, 32 e 33.

- A aresta 2.3 definida pelas DMU 24 e 18 comporta universidades de porte muito grande e grande e com ênfase na graduação ou na pós-graduação e pesquisa e caracterizada pela equação:

$$1,02 \text{ FORMADOS} + 1,00 \text{ ARTIGOS} + 1,02 \text{ IQGRAD} = 1,35 \text{ PROFESSORES} - 423$$

na qual projetam-se as DMU 08, 10, 15, 17, 20, 23, 25 e 26.

- A organização de convergência é a DMU 24, na qual projetam-se as DMU 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 11, 12, 13, 14, 16, 19, 21, 22 e 30, serve de referência para universidades de porte médio e grande e com ênfase voltada a graduação.

Merecem destaque os seguintes comentários:

- Os consumos mínimos, apresentados na tabela 4.2, variam dentro dos limites estipulados, pois $\mathbf{m}_F^*/\mathbf{n}_{PR}^*$ varia de 0,25 a 0,75; $\mathbf{m}_A^*/\mathbf{n}_{PR}^*$ de 0,25 a 0,75 e $\mathbf{m}_{IQ}^*/\mathbf{n}_{PR}^*$ de 0,25 a 0,75. Percebe-se que existe um equilíbrio nos consumos mínimos.
- As ‘Taxas de Troca entre Produtos’ apresentado na tabela 4.2, também não variam muito, haja vista que $\mathbf{m}_F^*/\mathbf{m}_A^*$ varia de 0,33 a 3,0; $\mathbf{m}_F^*/\mathbf{m}_{IQ}^*$ varia de 0,33 a 3,0 e $\mathbf{m}_A^*/\mathbf{m}_{IQ}^*$ varia de 0,33 a 2,96.

4.2 Aplicação do Modelo DEA-ACS de Ali, Cook & Seiford

Este é o modelo que contempla o tipo de restrição mais comum, pois permite estabelecer ordenamento nos multiplicadores associados aos insumos e nos multiplicadores associados aos produtos; isto é, este modelo permite considerar ordenamento das utilidades dos insumos consumidos e dos produtos gerados.

Optou-se por adotar o ordenamento: $m_F > m_A > m_Q$ dados:

- i. O caráter ilustrativo das aplicações desta dissertação;
- ii. O estabelecimento de restrições ordinais rígidas permitir o emprego de pacotes computacionais já existentes;
- iii. Os resultados dos Modelos BCC Seminal não indicarem qualquer noção de ordenamento, enquanto que os resultados do Modelo BCC Básico e DT indicarem $m_F > m_A = m_Q$ (salvo em algumas situações de valoração esdrúxulas nas quais, por exemplo, os professores deveriam aplicar todo o seu tempo para melhorar o IQGRAD, isto é, deveriam preocupar-se somente com o desempenho dos formandos nos Exames Nacionais de Cursos e não deveriam se preocupar com o número de alunos formados, nem com o número de artigos publicados).
- iv. A aplicação dos Exames Nacionais de Cursos ser recente (final da década de 90) e seus resultados não terem sido considerados pelos professores como mais importantes que publicação de artigos (em 1975), ano base do Banco de Dados de Referência.

As tabelas 4.4 , 4.5 e 4.6 transcrevem resultados da aplicação do Modelo BCC-ACS. A Figura 4.4 sintetiza pictoricamente os principais resultados dessa aplicação.

Diretamente associados ao estabelecimento de limites para os multiplicadores destacam-se as seguintes observações:

- i. Há cinco organizações eficientes: as DMU 06, 18, 24, 25 e 27; a DMU 23, eficiente no Modelo BCC Básico, deixou de sê-lo, uma vez que, para ser eficiente, essa DMU necessita que $m_F^* = m_A^* = 1 < 193 = m_Q^*$, ordenamento que não satisfaz as restrições impostas nesta ilustração.

A Figura abaixo, transcreve o Modelo BCC de Ali, Cook & Seiford empregado nesta aplicação.

FORMA DO ENVELOPAMENTO

$$F^* = \max \mathbf{I} + \mathbf{e}(s_F^+ + s_A^+ + s_{IQ}^+ + s_{PR}^-)$$

sujeito a

$$\mathbf{I} y_{F0} - \sum \mathbf{m}_j y_{Fn} + s_F^+ = 0,$$

$$\mathbf{I} y_{A0} - \sum \mathbf{m}_A y_{An} + s_A^+ - s_F^+ = 0,$$

$$\mathbf{I} y_{IQ0} - \sum \mathbf{m}_{IQ} y_{IQn} + s_{IQ}^+ - s_A^+ = 0,$$

$$\sum x_n z_n + s_{PR}^- = x_0,$$

$$\mathbf{I} \in R; \quad z_n \geq 0, \quad n = 1, \dots, 33$$

$$\sum_{n=1}^{33} z_n = 1 \quad s_F^+ \geq 0, \quad s_A^+ \geq 0, \quad s_{IQ}^+ \geq 0, \quad s_{PR}^- \geq 0,$$

$$\mathbf{e} > 0, \text{ não arquimediano}$$

Figura 4.3 Forma do Envelopamento do Modelo BCC-ACS

- ii. Das DMUs ineficientes, tem-se uma (DMU 08) que pode crescer em, até, 10%; duas (DMU 03, 17) podem crescer entre 10% e 20%; treze (DMU 02, 04, 07, 10, 11, 13, 20, 21, 22, 26, 29, 31 e 32) podem crescer entre 20% e 50%; dez (DMU 01, 05, 14, 15, 16, 19, 23, 28, 30 e 33) podem crescer entre 50% e 100%; duas (DMU 09 e 12) podem crescer mais que 100%.
- iii. Há uma faceta e três arestas de eficiência, a saber:
- A Faceta 1 definida pelas DMU 06, 24 e 25, que possuem elevada relação formado por professor o que é refletido nos multiplicadores que as variáveis produtos assumem, sendo que as universidades ineficientes, hierarquizando as suas variáveis de produção, como citado acima, podem crescer entre 08% e 287%, e caracterizada pela equação:

$$5,13 \text{ FORMADOS} + 2,00 \text{ ARTIGOS} + 1,00 \text{ IQGRAD} = 5,95 \text{ PROFESSORES-1306}$$
na qual projetam-se as DMU 01,02, 03, 04, 05, 07,08, 09, 10, 11, 13, 14, 16,17, 19, 21, 22, 23 e 26.

- A Aresta 4.5 definida pelas DMU 24 e 27 comporta universidades de pequeno porte e tem uma grande amplitude da variável IQGRAD e hierarquizando as variáveis de produção, como citado acima, as universidades ineficientes podem crescer entre 31% e 61%, e caracterizada pela equação:

$$3,00 \text{ FORMADOS} + 2,00 \text{ ARTIGOS} + 1,00 \text{ IQGRAD} = 7,13 \text{ PROFESSORES} + 1340$$

na qual projetam-se as DMU 28, 29, 30, 31, 32 e 33.

- A aresta 2.5 definida pelas DMU 18 e 24 comporta uma universidade grande que prioriza a graduação assim como a pós-graduação e caracterizada pela equação:

$$3,00 \text{ FORMADOS} + 2,00 \text{ ARTIGOS} + 1,00 \text{ IQGRAD} = 3,71 \text{ PROFESSORES} - 952$$

na qual projeta-se a DMU 20 que pode crescer até 30% usando as limitações citado acima.

- A aresta 2.3 definida pelas DMU 06 e 18 comporta universidades grandes voltadas para a graduação e caracterizada pela equação:

$$6,19 \text{ FORMADOS} + 2,00 \text{ ARTIGOS} + 1,00 \text{ IQGRAD} = 6,83 \text{ PROFESSORES} - 2188$$

na qual projetam-se as DMU 12 e 15 que podem crescer entre 197% e 332%.

Merecem destaque os seguintes comentários:

- Os consumos mínimos observados na tabela 4.5, não tem variação exagerada pois a relação $\bar{m}_F^*/\bar{n}_{PR}^*$ varia 0,42 a 0,91; $\bar{m}_A^*/\bar{n}_{PR}^*$, de 0,28 a 0,54 e $\bar{m}_Q^*/\bar{n}_{PR}^*$, de 0,14 a 0,27: praticamente a relação de 1 para 2 entre o consumo mínimo e o máximo.
- As 'Taxas de Troca entre Produtos' apresentado na tabela 4.5, também não variam muito, haja vista que \bar{m}_F^*/\bar{m}_A^* varia de 1,5 a 3,1; \bar{m}_F^*/\bar{m}_Q^* , de 3,0 a 6,19; enquanto que \bar{m}_A^*/\bar{m}_Q^* permanece constante e igual a 2. Observa-se que o valor médio das taxas de troca entre formados e artigos é de 2,3; entre formados e IQGRAD é de 4,65; e entre artigos e IQGRAD é de 2,0.

Tabela 4.4 Modelo Ali, Cook & Seiford: **Medida de Ineficiência, Indicador de Retorno de Escala; Multiplicadores Ótimos e Excessos de Produto. (Φ)**

DMUs	Medida de Ineficiência	Indicador de Retorno de Escala	Multiplicadores Ótimos				Excessos de Produto		
k	I^*	M^*	Insumo	Produtos					
			n_{PR}^*	m_F^*	m_A^*	m_{IQ}^*	s_F^{+*}	s_A^{+*}	s_{IQ}^{+*}
01	1,6616	1306	5,95	5,13	2	1	207	214	
02	1,2093	1306	5,95	5,13	2	1	17		
03	1,1139	1306	5,95	5,13	2	1	158	161	
04	1,2831	1306	5,95	5,13	2	1	301	298	
05	1,6296	1306	5,95	5,13	2	1	203	186	
06	# 1,0000	1306	5,95	5,13	2	1			
07	1,3071	1306	5,95	5,13	2	1	305	310	
08	1,0808	1306	5,95	5,13	2	1	4		
09	2,8779	1306	5,95	5,13	2	1	138	75	
10	1,3559	1306	5,95	5,13	2	1	27		
11	1,3024	1306	5,95	5,13	2	1	156	123	
13	1,4942	1306	5,95	5,13	2	1	271	239	
14	1,8704	1306	5,95	5,13	2	1	313	297	
16	1,6530	1306	5,95	5,13	2	1	190	173	
17	1,1571	1306	5,95	5,13	2	1	17		
19	1,6452	1306	5,95	5,13	2	1	35		
21	1,2970	1306	5,95	5,13	2	1	26		
22	1,4353	1306	5,95	5,13	2	1	236	220	
23	1,5054	1306	5,95	5,13	2	1	39		
25	# 1,0000	1306	5,95	5,13	2	1			
26	1,3119	1306	5,95	5,13	2	1	10		
12	3,3222	2188	6,83	6,19	2	1	379	257	
15	1,9767	2188	6,83	6,19	2	1	480	462	
18	# 1,0000	2188	6,83	6,19	2	1			
20	1,3036	952	3,71	3	2	1	135,9	22	
24	# 1,0000	1306	3,71	3	2	1			
27	# 1,0000	-1340	7,13	3	2	1			
28	1,6098	-1340	7,13	3	2	1	135	133	
29	1,3974	-1340	7,13	3	2	1	71	73	
30	1,5717	-1340	7,13	3	2	1	192,2	26	
31	1,3124	-1340	7,13	3	2	1	221	220	
32	1,4202	-1340	7,13	3	2	1	276	262	
33	1,5905	-1340	7,13	3	2	1	233	212	
Mínimo	1,0000		3,71	3	2	1			
1ºquartil	1,1832		5,95	3	2	1	17		
Média	1,4756		6,14	4,65	2	1	10	136	119
Mediana	1,3559		5,95	5,13	2	1	135	75	
3ºquartil	1,6197		6,83	5,13	2	1	234	220	
Máximo	3,3222		7,13	6,19	2	1	192,2	480	462

Φ As folgas não explicitadas são iguais a zero. # instituições eficientes

Tabela 4.5 Modelo de Ali, Cook & Seiford: DMUs de Referência; Consumos Mínimos e Taxas de Troca entre Produtos

DMUs	Referências	Consumos Mínimos			Taxas de Troca entre Produtos		
k		$\frac{m_P^*}{n_{PR}^*}$	$\frac{m_A^*}{n_{PR}^*}$	$\frac{m_{IQ}^*}{n_{PR}^*}$	$\frac{m_P^*}{m_A^*}$	$\frac{m_P^*}{m_{IQ}^*}$	$\frac{m_A^*}{m_{IQ}^*}$
01	06 e 24	0,86	0,34	0,17	2,6	5,13	2
02	06 e 24	0,86	0,34	0,17	2,6	5,13	2
03	06 e 24	0,86	0,34	0,17	2,6	5,13	2
04	06 e 24	0,86	0,34	0,17	2,6	5,13	2
05	06 e 24	0,86	0,34	0,17	2,6	5,13	2
06	# 06	0,86	0,34	0,17	2,6	5,13	2
07	06 e 24	0,86	0,34	0,17	2,6	5,13	2
08	06 e 24	0,86	0,34	0,17	2,6	5,13	2
09	06 e 24	0,86	0,34	0,17	2,6	5,13	2
10	06 e 24	0,86	0,34	0,17	2,6	5,13	2
11	06 e 24	0,86	0,34	0,17	2,6	5,13	2
13	06 e 24	0,86	0,34	0,17	2,6	5,13	2
14	06 e 24	0,86	0,34	0,17	2,6	5,13	2
16	06, 24 e 25	0,86	0,34	0,17	2,6	5,13	2
17	06, 24 e 25	0,86	0,34	0,17	2,6	5,13	2
19	06, 24 e 25	0,86	0,34	0,17	2,6	5,13	2
21	06, 24 e 25	0,86	0,34	0,17	2,6	5,13	2
22	06, 24 e 25	0,86	0,34	0,17	2,6	5,13	2
23	06, 24 e 25	0,86	0,34	0,17	2,6	5,13	2
25	# 25	0,86	0,34	0,17	2,6	5,13	2
26	06, 24 e 25	0,86	0,34	0,17	2,6	5,13	2
12	06 e 18	0,91	0,29	0,15	3,1	6,19	2
15	06 e 18	0,91	0,29	0,15	3,1	6,19	2
18	# 18	0,91	0,29	0,15	3,1	6,19	2
20	18 e 24	0,81	0,54	0,27	1,5	3	2
24	# 24	0,81	0,54	0,27	1,5	3	2
27	# 27	0,42	0,28	0,14	1,5	3	2
28	24 e 27	0,42	0,28	0,14	1,5	3	2
29	24 e 27	0,42	0,28	0,14	1,5	3	2
30	24 e 27	0,42	0,28	0,14	1,5	3	2
31	24 e 27	0,42	0,28	0,14	1,5	3	2
32	24 e 27	0,42	0,28	0,14	1,5	3	2
33	24 e 27	0,42	0,28	0,14	1,5	3	2
Mínimo		0,42	0,28	0,14	1,5	3	2
1ºquartil		0,81	0,29	0,15	1,5	3	2
Média		0,77	0,33	0,17	2,3	4,65	2
Mediana		0,86	0,34	0,17	2,6	5,13	2
3ºquartil		0,86	0,34	0,17	2,6	5,13	2
Máximo		0,91	0,54	0,27	3,1	6,19	2

instituições eficientes

Tabela 4.6 Modelo Ali, Cook & Seiford: Planos de Operação Observados e Metas Eficientes

DMUs	Planos de Operação Observados				Expansão Radial			Meta Global		
K	PROFESSORES	FORMADOS	ARTIGOS	IQGRAD	FORMADOS	ARTIGOS	IQGRAD	FORMADOS	ARTIGOS	IQGRAD
01	970	754	55	27,3	1253	91	45,3	1253	299	258,8
02	1357	1422	197	51,8	1720	238	62,6	1720	256	62,6
03	1127	1305	85	39,3	1454	95	43,8	1454	253	205,2
04	774	781	43	46,4	1002	55	59,5	1002	356	357,9
05	1211	958	15	38,6	1561	24	62,9	1561	228	248,5
06	#	1826	2348	47	28,8	2348	47	28,8	47	28,8
07	709	703	54	41,0	919	71	53,5	919	376	363,3
08	1657	1856	377	50,3	2006	407	54,3	2006	411	54,3
09	1066	478	46	39,0	1376	132	112,3	1376	271	187,0
10	1952	1711	336	57,6	2320	456	78,2	2320	482	78,6
11	1136	1125	72	61,7	1465	94	80,4	1465	250	203,2
13	827	716	47	58,0	1070	70	86,6	1070	341	325,8
14	884	611	6	37,3	1143	11	69,8	1143	324	366,6
16	1036	809	54	40,2	1337	89	66,5	1337	279	239,8
17	1829	1874	421	61,6	2168	487	71,3	2168	504	71,3
19	1758	1354	70	42,8	2228	115	70,4	2228	150	70,7
21	1246	1212	213	57,8	1572	276	75,0	1572	302	75,0
22	1070	962	23	45,4	1381	33	65,2	1381	269	285,1
23	1406	1106	329	65,9	1665	495	99,2	1665	534	99,2
25	#	2748	3115	806	61,6	3115	806	61,6	806	61,6
26	1636	1501	329	47,8	1969	432	62,7	1969	442	62,7
12	2690	932	88	51,7	3096	292	171,7	3096	671	429,2
15	2890	1654	170	37,0	3269	336	73,1	3269	816	534,9
18	#	3424	3732	1202	68,0	3732	1202	68,0	1202	68,0
20	2583	2088	819	67,0	2722	1068	87,4	2858	1090	87,4
24	#	670	869	387	59,4	869	387	59,4	387	59,4
27	#	343	278	122	29,4	278	122	29,4	122	29,4
28	427	267	34	24,4	430	55	39,2	430	190	172,4
29	575	499	171	35,2	697	239	49,2	697	310	121,7
30	579	326	305	49,0	512	479	77,1	705	505	77,1
31	545	490	49	37,5	643	64	49,2	643	286	269,3
32	586	505	30	46,2	717	43	65,6	717	319	328,0
33	550	410	36	43,2	652	57	68,8	652	290	280,9
Mínimo	343	267	6	24,4	278	11	28,8	278	47	28,8
1ºquartil	690	558	47	38,0	894	61	53,9	894	263	69,4
Média	1336	1174	213	46,9	1597	269	68,1	1607	405	186,8
Mediana	1127	958	85	46,2	1454	122	65,6	1454	319	172,4
3ºquartil	1792	1578	329	57,9	2198	420	76,0	2198	493	283,0
Máximo	3424	3732	1202	68,0	3732	1202	171,7	3732	1202	534,9

instituições eficientes

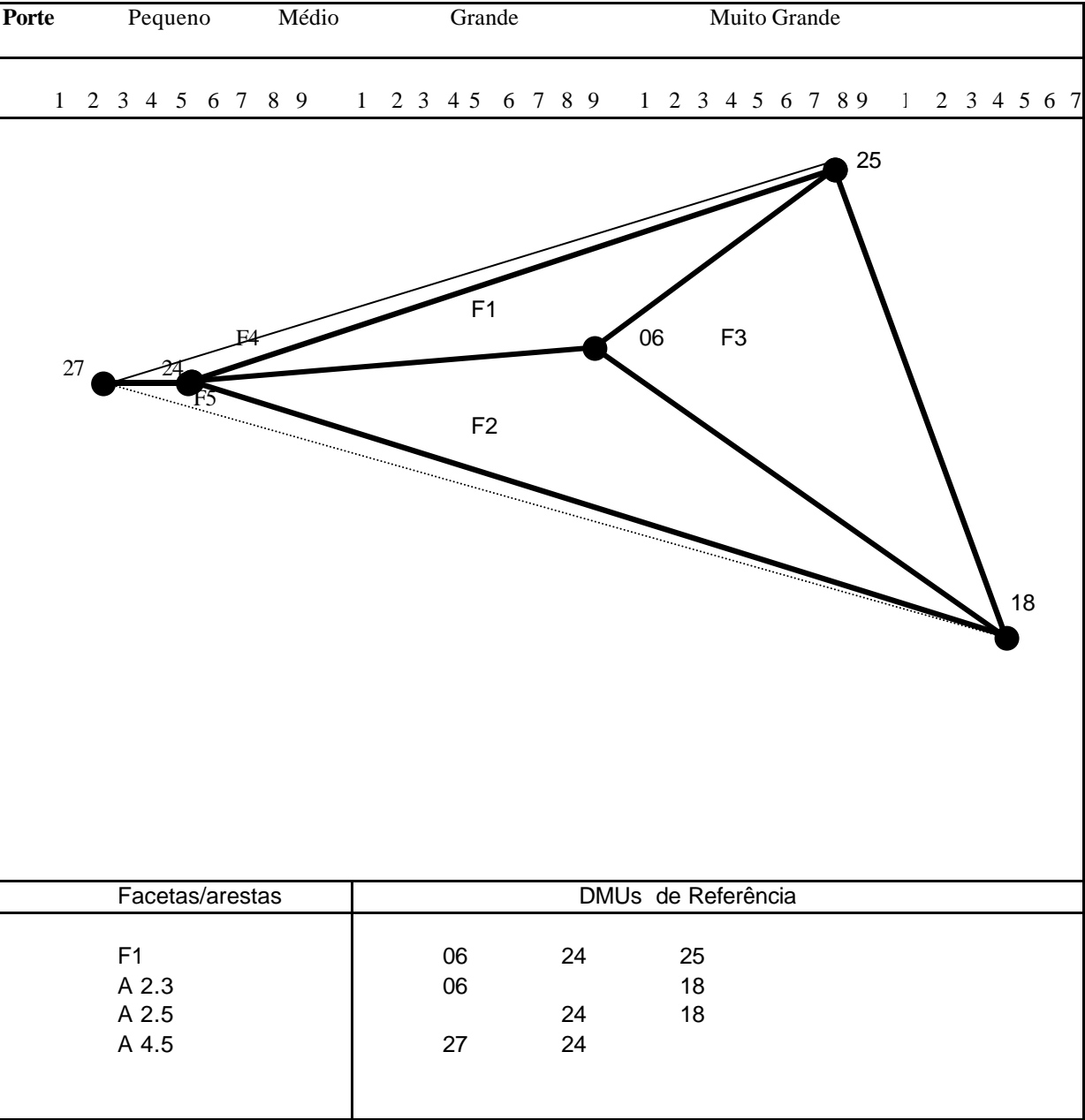


Figura 4.4 – Modelo DEA de Ali, Cook & Seiford: Fronteira de Produção Empírica

Pode-se observar que as DMU 06, 18, 24, 25 e 27, que servem de referência para as demais universidades, possuem uma elevada relação entre formado por professor, consequentemente servem como referência para as demais universidades pelo importância que está sendo dada a variável formado. Este tipo de restrição fornece uma indicação de quanto cada universidade deve crescer ao priorizar a graduação.

Uma consideração importante é observar que apesar de priorizar o produto formados, em segundo lugar artigos e por último IQGRAD, a projeção para a fronteira não se deve exclusivamente em relação ao produto formados e sim a uma combinação considerada ótima dos três produtos, resguardando as restrições. Por exemplo: a UFSC sob quaisquer restrição permanece com um indicador de eficiência entre 0,91 e 0,94, o que demonstra regularidade e homogeneidade na produção.

4.3 Aplicação do Modelo DEA-WB de Wong & Beasley

Este modelo contempla o tipo de restrição que permite avaliar a eficiência limitando a relação entre o produto virtual e a produção virtual. A tabela 4.7 transcreve esses valores para o Modelo BCC Básico, empregando as tabelas 3.1 e 3.4.

Optou-se por adotar com limite inferior e superior para a DMU^o o 1^o e o 3^o quartis da distribuição observada das proporções entre o produto e a produção virtuais, como mostrado abaixo:

$$0,097 \leq \frac{m_F y_{F0}}{\sum m_F y_{F0}} \leq 0,911; 0,007 \leq \frac{m_A y_{A0}}{\sum m_A y_{A0}} \leq 0,079; 0,018 \leq \frac{m_{IQ} y_{IQ0}}{\sum m_{IQ} y_{IQ0}} \leq 0,892$$

Tabela 4.7 Modelo BCC Básico – cálculo para limites do Modelo BCC-WB

DMUs	IQGRAD virtual	FORMADOS virtual	ARTIGOS virtual	soma tt cada DMU	IQGRAD virt. / soma tt cada DMU	FORMADOS virt / soma tt cada DMU	ARTIGOS virt / soma tt cada DMU
01	27,3	1986,7	55	2069,1	0,013	0,960	0,026
02	51,8	3746,9	197	3995,8	0,013	0,937	0,049
03	39,3	3438,6	85	3563,0	0,011	0,965	0,023
04	46,4	2057,9	43	2147,3	0,021	0,958	0,020
05	38,6	2524,3	15	2577,9	0,015	0,979	0,005
06	28,8	6186,9	47	6262,8	0,004	0,987	0,007
07	41,0	1852,4	54	1947,4	0,021	0,951	0,027
08	50,3	4890,5	377	5317,8	0,009	0,919	0,070
09	7532,4	478,0	46	8056,4	0,935	0,059	0,005
10	11127,8	1711,0	336	13174,8	0,844	0,129	0,025
11	11922,9	1125,0	72	13119,9	0,908	0,085	0,005
12	9977,5	932,0	88	10997,5	0,907	0,084	0,008
13	11195,3	716,0	47	11958,3	0,936	0,059	0,003
14	7202,3	611,0	6	7819,3	0,921	0,078	0,001
15	7144,4	1654,0	170	8968,4	0,796	0,184	0,019
16	7758,2	809,0	54	8621,2	0,899	0,093	0,006
17	11895,9	1874,0	421	14190,9	0,838	0,132	0,029
18	13140,7	3732,0	1202	18074,7	0,727	0,206	0,066
19	8259,9	1354,0	70	9683,9	0,853	0,139	0,007
20	12945,8	2088,0	819	15852,7	0,816	0,131	0,051
21	11164,5	1212,0	213	12589,4	0,886	0,096	0,016
22	8777,1	962,0	23	9762,2	0,899	0,098	0,002
23	12719,9	1106,0	329	14154,9	0,898	0,078	0,023
24	59,4	869,0	387	1315,4	0,045	0,660	0,294
25	61,6	7257,9	806	8125,6	0,007	0,893	0,099
26	47,8	3497,3	329	3874,2	0,012	0,902	0,084
27	29,4	278,0	122	429,4	0,068	0,647	0,284
28	24,4	267,0	34	325,4	0,075	0,820	0,104
29	35,2	499,0	171	705,2	0,050	0,707	0,242
30	49,1	326,0	305	680,1	0,072	0,479	0,448
31	37,5	490,0	49	576,5	0,065	0,849	0,085
32	46,2	505,0	30	581,2	0,079	0,868	0,051
33	43,2	410,0	36	489,2	0,088	0,838	0,073
Mínimo	24,4	267,0	6	325,4	0,004	0,059	0,001
1ºquartil	40,1	558,0	47	1631,4	0,018	0,097	0,007
Média	4652,2	1862,1	213	6727,5	0,416	0,514	0,068
Mediana	59,4	1212,0	85	6262,8	0,079	0,647	0,026
3ºquartil	10552,6	2306,1	329	11477,9	0,892	0,911	0,079
Máximo	13140,7	7257,9	1202	18074,6	0,936	0,987	0,448

A Figura 4.5 apresenta o Modelo DEA de Wong & Beasley empregado nesta dissertação.

FORMA DO ENVELOPAMENTO

$$F^* = \max \mathbf{I} + \mathbf{e}(s_F^+ + s_A^+ + s_{IQ}^+ + s_{PR}^-) \quad \text{sujeito a}$$

$$\mathbf{I} y_{IQ0} - \sum \mathbf{m}_p y_{pn} [LP_{IQ} - 1] \cdot r_1^+ \cdot y_{IQ0} + [1 - LP_{IQ}] \cdot n_1^+ \cdot y_{IQ0} + LP_F \cdot r_2^+ \cdot y_{IQ0}$$

$$- LP_F \cdot n_2^+ \cdot y_{IQ0} + LP_A \cdot r_3^+ \cdot y_{IQ0} - LP_A \cdot r_3^+ \cdot y_{IQ0} + s_{IQ}^+ = 0,$$

$$\mathbf{I} y_{F0} - \sum \mathbf{m}_p y_{pn} + LP_{IQ} \cdot r_1^+ \cdot y_{F0} + LP_{IQ} \cdot n_1^+ \cdot y_{F0} + [LP_{IF} - 1] \cdot r_2^+ \cdot y_{F0}$$

$$+ [1 - LP_{IF}] \cdot n_2^+ \cdot y_{F0} + LP_A \cdot r_3^+ \cdot y_{F0} - LP_A \cdot r_3^+ \cdot y_{F0} + s_F^+ = 0,$$

$$\mathbf{I} y_{A0} - \sum \mathbf{m}_p y_{pn} + LP_{IQ} \cdot r_1^+ \cdot y_{A0} - LP_{IQ} \cdot n_1^+ \cdot y_{A0} + LP_F \cdot r_2^+ \cdot y_{A0}$$

$$- LP_F \cdot r_2^+ \cdot y_{A0} + [LP_{IA} - 1] \cdot r_3^+ \cdot y_{A0} + [1 - LP_{Af}] \cdot n_3^+ \cdot y_{A0} + s_A^+ = 0,$$

$$\sum x_n z_n + s_{PR}^- = x_0, \quad \mathbf{I} \in R; \quad z_n \geq 0, \quad n = 1, \dots, 33 \quad \sum_{n=1}^{33} z_n = 1$$

$$s_F^+ \geq 0, \quad s_A^+ \geq 0, \quad s_{IQ}^+ \geq 0, \quad s_{PR}^- \geq 0,$$

$$r_F^+ \geq 0, \quad r_A^+ \geq 0, \quad r_{IQ}^+ \geq 0, \quad n_F^+ \geq 0, \quad n_A^+ \geq 0, \quad n_{IQ}^+ \geq 0,$$

$$\mathbf{e} > 0, \text{ não arquimediano}$$

Figura 4.5 Forma do Envelopamento do Modelo BCC-WB

As tabelas 4.8 a 4.11 transcrevem resultados da aplicação do Modelo DEA de Wong & Beasley ao Banco de Dados de Referência. A Figura 4.6 sintetiza pictoricamente a fronteira de produção empírica.

Diretamente associados ao estabelecimento de limites para os multiplicadores destacam-se as seguintes observações:

- i. Há cinco organizações eficientes: as DMU 18,23,24,25 e 27; a DMU 06, que é eficiente quando avaliada pelo Modelo BCC Básico, novamente deixou de sê-lo, uma vez que, para ser eficiente, ela necessita que $\mathbf{m}_F^* = \mathbf{m}_A^* = 1 < 193 = \mathbf{m}_{IQ}^*$, ordenamento que não satisfaz àquele adotado nesta ilustração.

Tabela 4.8 Modelo Wong & Beasley: Medida de Ineficiência, Indicador de Retorno de Escala, Multiplicadores Ótimos e Excessos de Produtos.

DMUs	Medida de Ineficiência	Indicador de Retorno de Escala	Multiplicadores Ótimos				Excessos de Produto					
k	I^*	M^*	n^*	m_F^*	m_A^*	m_Q^*	n_F^*	r_F^*	n_A^*	r_A^*	n_{IQ}^*	r_{IQ}^*
01	1,7074	2410	10,7	9,0	1	22,3		0,2	3,6			
02	1,1495	7889	16,8	15,2	1	92,4			1,4			
03	1,1349	2523	9,4	8,0	1	23,9		0,1	1,7			
04	1,3224	2571	6,6	5,9	1	24,8			7,9			
05	1,7592	769	2,3	1,9	1	4,3		0,1	34,9			
06	1,0950	1663	2,9	2,4	1	18,2		1,3	13,3			
07	1,3582	1820	11,5	9,4	1	14,6		0,1	5,5			
08	1,0703	12437	25,5	23,2	1	150,1			0,2			
09	1,7370	8591	2,1	1,3	1	142,6			8,3			1,1
10	1,1413	38520	7,2	4,6	1	655,9			0,7			
11	1,0534	9706	1,9	1,0	1,1	162,6			6,1			0,2
12	1,5361	12344	2,3	1,2	1	208,2			8,0			1,9
13	1,1336	6698	1,7	1,0	1,1	110,2			7,8			0,4
14	2,1641	9953	3,7	1,0	7,4	146,2			73,3			0,2
15	1,8533	34867	2,9	1,4	1	561,6			3,8			
16	1,5667	10677	1,9	1,0	1,1	179,7			7,6			
17	1,0433	44810	8,4	5,4	1	761,9			0,5			
18	# 1,0000	135522	8,5	4,4	1	2.158,6						
19	1,5329	11480	1,9	1,0	1	193,9			8,5			
20	1,0272	67818	6,6	3,8	1	1.100,9	0,2					
21	1,0886	25866	4,7	2,9	1	439,1			1,2			
22	1,4851	11573	2,5	1,0	3,1	188,8			20,6			
23	# 1,0000	35734	6,6	4,2	1	607,2						
24	# 1,0000	46892	9,1	6,1	1	796,4						
25	# 1,0000	31561	28,7	25,8	1	469,4						
26	1,2741	22681	21,2	19,1	1	334,8			0,5			
27	# 1,0000	-3255	58,2	6,0	1	507						
28	1,5601	-1103	19,6	1,7	1	170,4			3,9			0,1
29	1,4041	-14891	83,0	42,7	1	54,3		0,1	0,4			
30	1,1489	-683	8,8	1,1	1	64,6	1,1					
31	1,3145	-953	17,9	1,3	1	159,6			4,5			
32	1,2179	-734	11,7	1,0	1,2	97,5			9,5			0,3
33	1,2164	-777	12,3	1,2	1	101,7			6,46			0,5
Mínimo	1,0000		1,7	1,0	1,0	4,3						
1ºquartil	1,0619		2,7	1,1	1,0	78,5			0,3			
Média	1,3059		12,7	6,5	1,0	324,9	0,04		7,3			0,2
Mediana	1,2164		8,3	2,9	1,0	162,5			3,9			
3ºquartil	1,5345		14,5	7,0	1,0	488,1			7,9			0,1
Máximo	2,1641		83,0	42,7	7,4	2.158,6	1,1	1,3	73,3	0		1,9

Φ As folgas não explicitadas são iguais a zero. # instituições eficientes

Tabela 4.9 Modelo de Wong & Beasley: DMUs de Referência, Consumos Mínimos e Taxas de Troca entre Produtos

DMUs	Referências	Consumos Mínimos			Taxa de Troca entre Produtos*100		
k		$\frac{\bar{m}_P}{n_{PR}^*}$	$\frac{\bar{m}_A}{n_{PR}^*}$	$\frac{\bar{m}_Q}{n_{PR}^*}$	$\frac{\bar{m}_P}{\bar{m}_A}$	$\frac{\bar{m}_P}{\bar{m}_Q}$	$\frac{\bar{m}_A}{\bar{m}_Q}$
01	18 e 24	0,9	0,1	2,1	901	40,4	4,5
03	18 e 24	0,9	0,1	2,6	805	33,7	4,2
05	18 e 24	0,8	0,4	1,9	193	45	23,3
06	18 e 24	0,8	0,3	6,2	249	13,7	5,5
07	18 e 24	0,8	0,1	1,3	949	65,2	6,9
09	18 e 24	0,6	0,5	67,6	131	0,9	0,7
10	18 e 24	0,7	0,1	91,3	464	0,7	0,2
11	18 e 24	0,5	0,6	86,5	88	0,6	0,7
12	18 e 24	0,6	0,4	90,9	129	0,6	0,5
13	18 e 24	0,6	0,7	64,4	90	0,9	1
14	18 e 24	0,3	2,0	39,6	13	0,7	5,1
15	18 e 24	0,5	0,4	195,7	141	0,3	0,2
22	18 e 24	0,4	1,2	74,6	33	0,5	1,6
02	18, 24 e 25	0,9	0,1	5,5	1529	16,6	1,1
04	18, 24 e 25	0,9	0,2	3,7	593	23,9	4
08	18, 24 e 25	0,9	0	5,9	2329	15,5	0,7
26	18, 24 e 25	0,9	0,1	15,8	1912	5,7	0,3
16	18, 23 e 24	0,5	0,6	93,6	92	0,6	0,6
17	18, 23 e 24	0,7	0,1	90,8	548	0,7	0,1
19	18, 23 e 24	0,5	0,5	99,9	99	0,5	0,5
18	# 18	0,5	0,1	253,9	441	0,2	0,1
20	18 e 23	0,6	0,2	165,8	385	0,3	0,1
21	18 e 23	0,6	0,2	92,8	294	0,7	0,2
23	# 23	0,6	0,2	91,5	426	0,7	0,2
24	# 24	0,7	0,1	87,1	610	1	0,1
					0	0	0
25	# 25	0,9	0	16,4	2589	5,5	0,2
27	# 27	0,1	0	8,7	601	1,2	0,2
28	24 e 27	0,1	0,1	8,7	174	1	0,6
29	24 e 27	0,5	0	0,7	4276	78,8	1,8
30	24 e 27	0,1	0,1	7,3	115	1,8	1,6
31	24 e 27	0,1	0,1	8,9	136	0,9	0,6
32	24 e 27	0,1	0,1	8,3	81,3	1	1,3
33	24 e 27	0,1	0,1	8,3	120	1,2	1
Mínimo		0,1	0	0,7	13	0,2	0,1
1ºquartil		0,5	0,1	6,0	117,5	0,7	0,2
Média		0,6	0,3	54,5	652,6	10,9	2,1
Mediana		0,6	0,1	16,4	294,0	1,0	0,7
3ºquartil		0,8	0,4	91,1	707,5	14,6	1,7
Máximo		0,9	2,0	253,9	4276	78,8	23,3

instituições eficientes

Tabela 4.10 Modelo Wong & Beasley: Planos de Operação Observados e Metas Eficientes

DMUs	Planos de Operação Observados				Expansão Radial			Meta Global		
K	PROFESSORES	FORMADOS	ARTIGOS	IQGRAD	FORMADOS	ARTIGOS	IQGRAD	FORMADOS	ARTIGOS	IQGRAD
01	970	754	55	27,3	1.287	94	46,6	1.288	97	46,6
02	1.357	1.422	197	51,8	1.635	226	59,6	1.635	228	59,6
03	1.127	1.305	85	39,3	1.481	96	44,7	1.481	98	44,7
04	774	781	43	46,4	1.033	57	61,4	1.033	65	61,4
05	1.211	958	15	38,6	1.685	26	67,9	1.685	61	67,9
06	1.826	2.348	47	28,9	2.571	51	31,6	2.573	65	31,6
07	709	703	54	41,0	955	73	55,7	955	79	55,7
08	1.657	1.856	377	50,3	1.986	404	53,8	1.986	404	53,8
09	1.066	478	46	39,0	830	80	67,8	830	88	68,9
10	1.952	1.711	336	57,7	1.953	384	65,8	1.953	384	65,8
11	1.136	1.125	72	61,8	1.185	76	65,1	1.185	82	65,3
12	2.690	932	88	51,7	1.432	135	79,4	1.432	143	81,3
13	827	716	47	58,0	812	53	65,8	812	61	66,2
14	884	611	6	37,3	1.322	13	80,8	1.322	86	80,9
15	2.890	1.654	170	37,3	3.065	315	68,6	3.065	319	68,6
16	1.036	809	54	40,2	1.267	85	62,9	1.267	92	62,9
17	1.829	1.874	421	61,6	1.955	439	64,3	1.955	440	64,3
18	# 3.424	3.732	1.202	68,1	3.732	1.202	68,1	3.732	1.202	68,1
19	1.758	1.354	70	42,8	2.076	107	65,6	2.076	116	65,6
20	2.583	2.088	819	67,1	2.145	841	68,9	2.145	841	68,9
21	1.246	1.212	213	57,9	1.319	232	62,9	1.319	233	62,9
22	1.070	962	23	45,5	1.429	34	67,6	1.429	55	67,6
23	# 1.406	1.106	329	65,9	1.106	329	65,9	1.106	329	65,9
24	# 670	869	387	59,4	869	387	59,4	869	387	59,4
25	# 2.748	3.115	806	61,7	3.115	806	61,6	3.115	806	61,6
26	1.636	1.501	329	47,9	1.913	419	60,9	1.913	420	60,9
27	# 343	278	122	29,4	278	122	29,4	278	122	29,4
28	427	267	34	24,4	417	53	38,1	417	57	38,2
29	575	499	171	35,2	701	240	49,5	701	240	49,5
30	579	326	305	49,1	375	350	56,4	376	350	56,4
31	545	490	49	37,5	644	64	49,3	644	69	49,4
32	586	505	30	46,3	615	37	56,3	615	46	56,6
33	550	410	36	43,3	499	44	52,7	499	50	53,1
Mínimo	343	267	6	24,4	278	13	29,4	278	46	29,4
1ºquartil	690	558	47	38,1	821	55	53,3	821	67	53,5
Média	1.336	1.174	213	46,5	1.445	239	59,2	1.445	246	59,4
Mediana	1.127	958	85	46,3	1.319	107	61,7	1.319	116	61,7
3ºquartil	1.792	1.578	329	57,9	1.954	367	66,7	1.954	367	67,0
Máximo	3.424	3.732	1.202	68,1	3.732	1.202	80,8	3.732	1.202	81,3

instituições eficientes

Tabela 4.11 Proporções dos produtos nos limites impostos no Modelo Wong & Beasley

DMUs	Produtos Observados			Multiplicadores Ótimos			Valor da Produção				Valor Relativo da Produção x 100		
k	FORMADO S	ARTIGOS	IQGRAD	\bar{m}_F^*	\bar{m}_A^*	\bar{m}_Q^*	FORMADO S	ARTIGOS	IQGRAD	Soma	FORMADO S	ARTIGO S	IQGRAD
01	754	55	27,3	9,0	1,0	22,3	6794	55,0	608,2	7457	91,1	0,7	8,2
02	1.422	197	51,8	15,3	1,0	92,4	21742	197,0	4787	26726	81,3	0,7	17,9
03	1.305	85	39,3	8,1	1,0	23,9	10505	85,0	940,2	11531	91,1	0,7	8,2
04	781	43	46,4	5,9	1,0	24,8	4631	43,0	1153	5827	79,5	0,7	19,7
05	958	15	38,6	1,9	1,0	4,3	1849	15,0	165,6	2030	91,1	0,7	8,2
06	2.348	47	28,9	2,5	1,0	18,2	5847	47,0	525,3	6419	91,1	0,7	8,2
07	703	54	41,0	9,5	1,0	14,6	6672	54,0	597	7322	91,1	0,7	8,2
08	1.856	377	50,3	23,3	1,0	150,1	43226	377,0	7549	51152	85,0	0,7	14,8
09	478	46	39,0	1,3	1,0	142,6	626	46,0	5567	6239	10,1	0,7	89,2
10	1.711	336	57,7	4,6	1,0	655,9	7939	336,0	37816	46091	17,3	0,7	81,9
11	1.125	72	61,8	1,0	1,1	162,6	1125	82,1	10042	11249	10,0	0,7	89,3
12	932	88	51,7	1,3	1,0	208,2	1202	88,0	10761	12052	10,0	0,7	89,3
13	716	47	58,0	1,0	1,1	110,2	716	52,2	6392	7160	10,0	0,7	89,3
14	611	6	37,3	1,0	7,4	146,2	611	44,6	5454	6110	10,0	0,7	89,3
15	1.654	170	37,0	1,4	1,0	561,6	2316	170,0	20779	23265	10,1	0,7	89,2
16	809	54	40,2	1,0	1,1	179,7	809	58,9	7222	8090	10,0	0,7	89,3
17	1.874	421	61,6	5,5	1,0	761,9	10270	421,0	46964	57655	17,8	0,7	81,4
18	3.732	1.202	68,1	4,4	1,0	2159	16458	1202,0	1E+05	164638	10,0	0,7	89,3
19	1.354	70	42,8	1,0	1,0	193,9	1354	70,7	8300	9725	13,9	0,7	85,3
20	2.088	819	67,1	3,9	1,0	1101	8039	819,0	73850	82708	10,0	0,7	89,3
21	1.212	213	57,9	2,9	1,0	439,1	3563	213,0	25401	29177	12,3	0,7	87,1
22	962	23	45,5	1,0	3,1	188,8	962	70,2	8588	9620	10,0	0,7	89,3
23	1.106	329	65,9	4,3	1,0	607,2	4712	329,0	40023	45064	10,5	0,7	88,8
24	869	387	59,4	6,1	1,0	796,4	5301	387,0	47329	53017	10,0	0,7	89,3
25	3.115	806	61,7	25,9	1,0	469,4	80647	806,0	28935	110389	73,0	0,7	26,3
26	1.501	329	47,9	19,1	1,0	334,8	28699	329,0	16025	45053	63,7	0,7	35,6
27	278	122	29,4	6,0	1,0	507	1671	122,0	14917	16710	10,0	0,7	89,3
28	267	34	24,4	1,7	1,0	170,4	465	34,0	4158	4657	10,0	0,7	89,3
29	499	171	35,2	42,8	1,0	54,3	21337	171,0	1911	23420	91,1	0,7	8,2
30	326	305	49,1	1,2	1,0	64,6	375	305,0	3172	3852	9,7	7,9	82,3
31	490	49	37,5	1,4	1,0	159,6	666	49,0	5991	6707	10,0	0,7	89,3
32	505	30	46,3	1,0	1,2	97,5	505	36,9	4508	5050	10,0	0,7	89,3
33	410	36	43,3	1,2	1,0	101,7	492	36,0	4403	4931	10,0	0,7	89,3

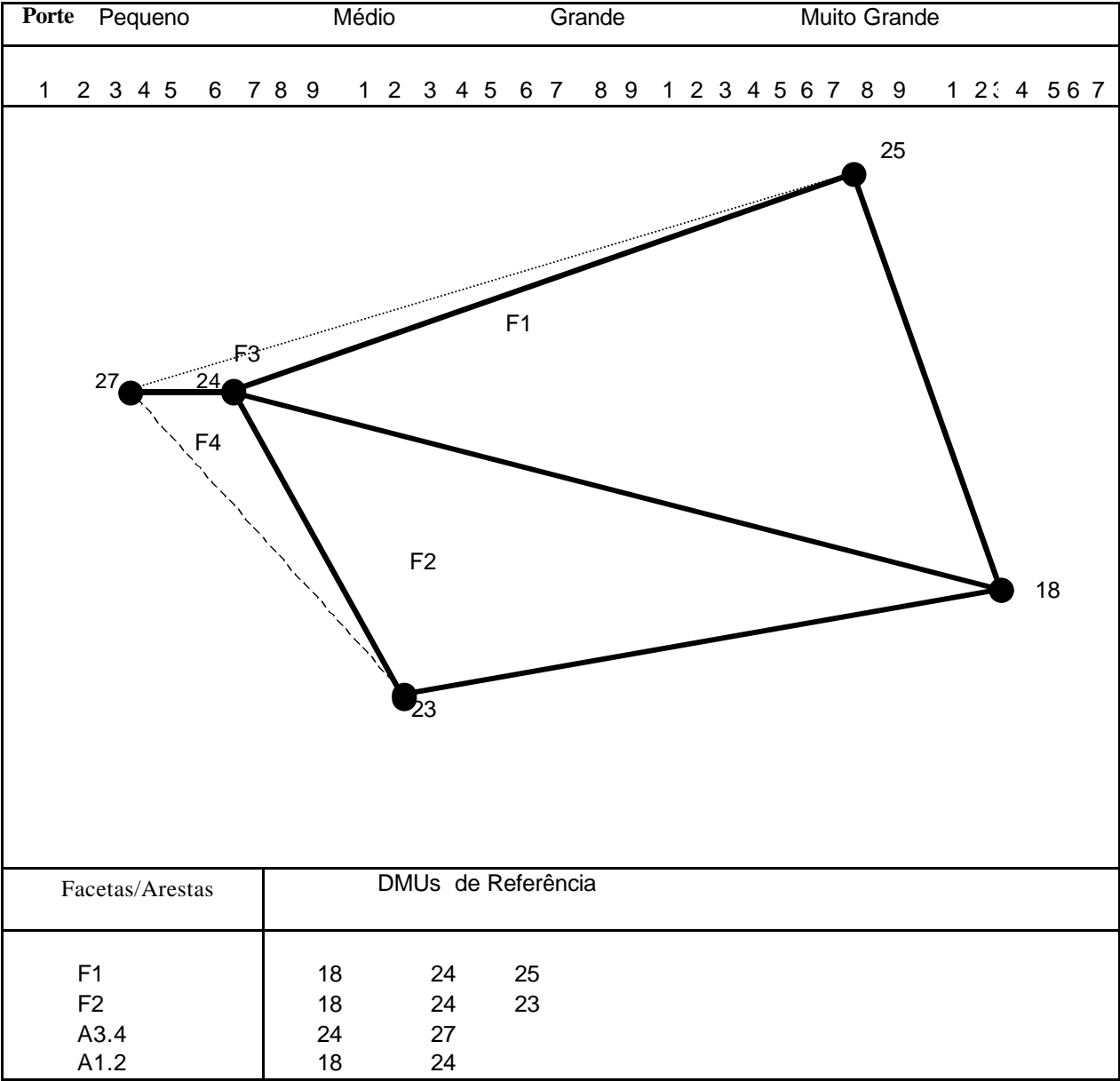


Figura 4.6 – Modelo DEA de Wong & Beasley: Fronteira de Produção Empírica

ii. Das DMUs ineficientes, tem-se seis (DMU 06, 08, 11, 17, 20 e 21) que podem crescer em, até, 10%; cinco (DMU 02, 03, 10, 13 e 30) que podem crescer entre 10% e 20%; oito (DMU 04, 07, 22, 26, 29, 31, 32 e 33) que podem crescer entre 20% e 50%; (DMU 01, 05, 09, 12, 15, 16, 19 e 28) podem crescer entre 50% e 100%; e uma (DMU 14) pode crescer mais que 100%.

iii. Há duas facetas e uma aresta de eficiência, a saber:

- A Aresta 3.4 definida pelas DMU 24 e 27 comporta universidades de porte pequeno e com ênfase na graduação e caracterizada pelas equações:

$$1,70 \text{ FORMADOS} + 1,00 \text{ ARTIGOS} + 170,40 \text{ IQGRAD} = 19,60 \text{ PROFESSORES} + 1103$$

na qual projeta-se a DMU 28;

$$42,80 \text{ FORMADOS} + 1,00 \text{ ARTIGOS} + 54,30 \text{ IQGRAD} = 83,10 \text{ PROFESSORES} + 14891$$

na qual projeta-se a DMU 29;

$$1,20 \text{ FORMADOS} + 1,00 \text{ ARTIGOS} + 64,60 \text{ IQGRAD} = 8,80 \text{ PROFESSORES} + 683$$

na qual projeta-se a DMU 30;

$$1,40 \text{ FORMADOS} + 1,00 \text{ ARTIGOS} + 159,60 \text{ IQGRAD} = 17,90 \text{ PROFESSORES} + 953$$

na qual projeta-se a DMU 31;

$$1,00 \text{ FORMADOS} + 1,20 \text{ ARTIGOS} + 97,50 \text{ IQGRAD} = 11,70 \text{ PROFESSORES} + 734$$

na qual projeta-se a DMU 32;

$$1,20 \text{ FORMADOS} + 1,00 \text{ ARTIGOS} + 101,70 \text{ IQGRAD} = 12,30 \text{ PROFESSORES} + 777$$

na qual projeta-se a DMU 33;

- A Faceta 2 definida pelas DMU 18, 23 e 24 comporta universidades de porte médio e grande com ênfase voltada a graduação e caracterizada pelas equações:

$$1,00 \text{ FORMADOS} + 1,10 \text{ ARTIGOS} + 179,70 \text{ IQGRAD} = 1,90 \text{ PROFESSORES} - 10677$$

na qual projeta-se a DMU 16;

$$5,50 \text{ FORMADOS} + 1,00 \text{ ARTIGOS} + 761,90 \text{ IQGRAD} = 8,40 \text{ PROFESSORES} - 44810$$

na qual projeta-se a DMU 17;

$$1,00 \text{ FORMADOS} + 1,00 \text{ ARTIGOS} + 193,90 \text{ IQGRAD} = 1,90 \text{ PROFESSORES} - 11480$$

na qual projeta-se a DMU 19;

$$3,90 \text{ FORMADOS} + 1,00 \text{ ARTIGOS} + 1100,90 \text{ IQGRAD} = 6,6 \text{ PROFESSORES} - 67818$$

na qual projeta-se a DMU 20;

$$2,90 \text{ FORMADOS} + 1,00 \text{ ARTIGOS} + 439,10 \text{ IQGRAD} = 4,70 \text{ PROFESSORES-25866}$$

na qual projeta-se a DMU 21;

- A Faceta 1 definida pelas DMU 18, 24 e 25 comporta universidades de porte médio e grande com ênfase voltada a graduação e caracterizada pelas equações:

$$15,30 \text{ FORMADOS} + 1,00 \text{ ARTIGOS} + 92,40 \text{ IQGRAD} = 16,80 \text{ PROFESSORES-7889}$$

na qual projeta-se a DMU 02;

$$5,90 \text{ FORMADOS} + 1,00 \text{ ARTIGOS} + 24,80 \text{ IQGRAD} = 6,60 \text{ PROFESSORES-2571}$$

na qual projeta-se a DMU 04;

$$23,30 \text{ FORMADOS} + 1,00 \text{ ARTIGOS} + 150,10 \text{ IQGRAD} = 25,50 \text{ PROFESSORES-12437}$$

na qual projeta-se a DMU 08;

$$19,10 \text{ FORMADOS} + 1,00 \text{ ARTIGOS} + 334,80 \text{ IQGRAD} = 21,20 \text{ PROFESSORES-22681}$$

na qual projeta-se a DMU 26;

- A aresta 1.2 definida pelas DMU 18 e 24 comporta universidades de porte médio e grande com ênfase na graduação e nela se projetam as DMU 01, 03, 05, 06, 07, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 15 e 22.

O elevado número de equações definidas das facetas e arestas de eficiência, deve-se ao fato da Função de Produção mudar de DMU para DMU, haja vista que cada DMU é avaliada segundo restrição estabelecida pelo plano de operação que ela própria executou.

Destacam-se, ainda, os seguintes comentários:

- Os consumos mínimos ainda tem uma variação significativa, pois \bar{m}_P/\bar{n}_{PR}^* varia de 0,1 a 0,9; \bar{m}_A/\bar{n}_{PR}^* , de 0,01 a 2,0; e \bar{m}_Q/\bar{n}_{PR}^* , de 0,7 a 253,9. Tal resultado indica que os limites adotados não parecem ser adequados.
- As 'Taxas de Troca entre Produtos' da tabela 4.10, também variam muito, uma vez que \bar{m}_P/\bar{m}_A varia de 0,13 a 42,76; \bar{m}_P/\bar{m}_Q , de 0,002 a 0,788; e

\bar{m}_A^*/\bar{m}_Q^* , de 0,001 a 0,233. Observa-se que a mediana das taxas \bar{m}_I^*/\bar{m}_A^* é 2,94; das taxas \bar{m}_I^*/\bar{m}_Q^* , 0,01; e das taxas \bar{m}_A^*/\bar{m}_Q^* , 0,007.

A tabela 4.12 sintetiza alguns aspectos dos resultados das seções anteriores:

Tabela 4.12 Síntese das características das Fronteiras de Produção Empíricas construídas com o Modelo BCC Básico e os Modelos de Dyson & Thanassoulis, Ali Cook & Seiford, e Wong & Beasley.

Características	BCC Básico	BCC -DT	BCC-ACS	BCC-WB
DMUs Eficientes	06;18;23;24;25;27	18;24;27	18;23;24;25;27	18;23;24;25;27
DMUs mais ineficientes	15 ($I^* = 1,82$) 01 ($I^* = 1,66$) 09 ($I^* = 1,61$) 14 ($I^* = 1,63$)	12 ($I^* = 3,71$) 09 ($I^* = 2,98$) 15 ($I^* = 2,30$) 14 ($I^* = 2,06$)	12 ($I^* = 3,32$) 09 ($I^* = 2,87$) 15 ($I^* = 1,98$) 14 ($I^* = 1,87$)	14 ($I^* = 2,16$) 15 ($I^* = 1,85$) 05 ($I^* = 1,76$) 09 ($I^* = 1,74$)
I^*				
Mínimo	1,00	1,00	1,00	1,00
1ºquartil	1,02	1,25	1,18	1,06
Média	1,24	1,49	1,48	1,30
Mediana	1,14	1,47	1,36	1,22
3ºquartil	1,43	1,78	1,62	1,53
Máximo	1,82	3,70	3,32	2,16

Um exame desse tabela indica que:

- As DMU 18, 24 e 27 são organizações apropriadas para serem tomadas como referência, tanto pelas DMUs ineficientes como pelas autoridades responsáveis pelo planejamento do desenvolvimento setorial, haja vista que elas são eficientes em qualquer um dos quatro Modelos DEA adotados. Ademais, suas taxas de troca de produtos e de substituição de insumos podem ser consideradas as mais apropriadas para definir as características das condições de eficiência setorial.

- ii. As DMU 6, 23 e 25 são organizações apropriadas para serem tomadas como referência somente para alguns elencos específicos de taxas de troca e de substituição; tais organizações merecem atenção especial pois determinam características de condições de eficiência que possibilitam mudanças na ênfase setorial.
- iii. As DMU 09, 14 e 15 estão sempre entre aquelas de pior desempenho em qualquer dos Modelos DEA aplicados. Especial atenção deve ser dada a elas na identificação de causas ainda não consideradas que possam explicar seus expressivos níveis de ineficiência, pois essas organizações podem estar sendo prejudicadas devido a falhas no processo de modelagem da tecnologia empírica empregada para avaliá-las, enquanto que outras organizações podem estar sendo beneficiadas por essas falhas.

Muito cuidado deve ser tomado ao classificar uma DMU⁰ como eficiente, sem uma verificação da adequabilidade dos multiplicadores ótimos calculados pela DEA ao contexto sócio-econômico e cultural do ambiente no qual essa DMU⁰ opera, visto que essa classificação determina as metas a serem definidas para aumentar a produtividade das DMUs ineficientes que tomam a DMU⁰ como referência. Por exemplo, dependendo do modelo DEA adotado, a produtividade da DMU 09 pode crescer de pelo menos 60% (BCC-Básico), 74% (BCC-WB), 187% (BCC-ACS) a 198% (BCC-DT).

5 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

5.1 CONCLUSÕES

Os modelos DEA de Dyson & Thanassoulis, de Ali, Cook & Seiford e de Wong & Beasley foram descritos de modo a destacar os diferentes tipos de restrição que geralmente são impostos aos multiplicadores ótimos.

Por outro lado, os Modelos DEA usando restrições nos multiplicadores ótimos mostram-se flexíveis na imposição de limites e, assim, permitem empregar taxas de troca entre produtos e taxas de substituição entre insumos mais adequadas para a avaliação da eficiência técnica de cada DMU.

A análise dos resultados obtidos permite listar as seguintes conclusões:

- A metodologia DEA é uma ferramenta útil para avaliar a eficiência de organizações complexas que operam com múltiplos insumos e múltiplos produtos, pois permite incluir limitações nas taxas de troca dos produtos e nas taxas de substituição dos insumos para torná-las adequadas ao ambiente sócio-econômico e cultural de cada DMU.
- Os diferentes tipos de modelos com limitações nos multiplicadores, podem levar a diferentes indicadores de eficiência, permitindo melhor conhecer a tecnologia produtiva das DMUs.
- A sugestão da utilização dos três modelos elementares da técnica DEA apresentados no capítulo anterior com as limitações impostos nos multiplicadores finaliza o estudo e demonstra a viabilidade de se criar estratégias de limitações nos multiplicadores na aplicação da técnica DEA enquanto uma metodologia utilizada para avaliar a eficiência produtiva de instituições.

5.2 RECOMENDAÇÕES

Pesquisas futuras sobre o tema DEA e seus limites nos multiplicadores deveriam ser realizadas, no sentido de:

- empregar Bancos de Dados de Referência diferentes para ilustrar as diferenças empíricas dos vários modelos DEA;
- apresentar modelos mais complexos na imposição de restrições aos multiplicadores ótimos;
- restringir os multiplicadores ótimos através de opiniões de especialistas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALI, A. I.; COOK, W. D.; SEIFORD, L. M. **Strict Vs Weak Ordinal Relations for Multipliers in Data Envelopment Analysis**. Management Science, 37, 06, 733-738, 1991.
- ALI, A. I.; SEIFORD, L. M. **Computational Accuracy and Infinitesimals in Data Envelopment Analysis**. INFO, 31(4): 290-297, 1993.
- BANKER, R.D.; CHARNES, A.; COOPER, W.W. **Some models for estimation technical and scale inefficiencies in Data Envelopment Analysis**. Management Science, 30(9): 1078-1092, 1984.
- BELLONI, A.J. **Uma Metodologia de Avaliação da Eficiência Produtiva de Universidades Federais Brasileiras**. Florianópolis, 2000. Tese de Doutorado, UFSC, 2000.
- BOUSSOFIANE, A.; DYSON, R. G.; THANASSOULIS, E. **Applied Data Envelopment Analysis**. European Journal of Operational Research, 52, 1-15, 1991.
- CHARNES, A.; COOPER, W. W. **Programming with linear fractional functionals**. Naval Res. Logist. Quart., 9, 181-185, 1962.
- CHARNES, A.; COOPER, W. W.; HUANG, Z. M; SUN, D.B. **Polyhedral cone-ratio DEA models with na illustrative application to large commercial Banks**. Journal of Econometrics, 46, 73-91, 1990.
- CHARNES, A.; COOPER, W. W.; LEWIN, A. Y.; SEIFORD, L. M. **Data Envelopment Analysis: Theory, Methodology and Application**. 2 Ed., Kluwer Academic Publishers, Boston, 1993.
- CHARNES, A.; COOPER, W. W.; WEI, Q. L.; HUANG, Z. M. **Cone ratio data envelopment analysis and multi-objective programming**. International Journal Systems Science, 20, n.º07, 1099-1118, 1989.
- CHARNES, A; COOPER, W. W.; RHODES, E. **Evaluating Program and Managerial Efficiency: na Application of Data Envelopment Analysis to Program Follow Through**. Management Science, 27, n.º 06, 668-697, 1981.
- CHARNES, A; COOPER, W. W.; RHODES, E. **Measuring the efficiency of decision making units**. European Journal of Operational Research, 02, nº 06, 429-444, 1978.

- CHARNES, A; COOPER, W. W.; RHODES, E. **Measuring the efficiency of decision making units**. European Journal of Operational Research, 03, nº 4, pág. 339, 1979 (correção).
- DEBREU, G. **The Coeficient of Resource Utilization**. Econometrica 19: 273-292, 1951.
- DYSON, R. G.; THANASSOULIS, E. **Reducing Weight Flexibility in Data Envelopment Analysis**. Journal of the Operational Research Society, 39, 06, 563-576, 1988.
- FÄRE, R.; GROSSKOPF, S., KNOX LOVELL, C.A.K. **Production Frontiers**. New York, Cambridge University, 1994.
- FARRELL, M. J.; **The Measurement of Productive Efficiency**. Journal of the Royal Statistical Society, Series A, part III, p. 253-290, 1957.
- FRIED, H.O.;LOVELL, C. A . K.; SCHMIDT, S. S. **The Measurement of Productive Efficiency: techniques and applications**. (eds.), New York, Oxford University, 1993.
- GOLANY, B. **A Note on Including Ordinal Relations Among Multipliers in Data Envelopment Analysis**. Management Science, 34, n.º08, 1029-1033, 1988.
- KOOPMANS, T. C. **An Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities**. In: T.C.Koopmans, ed., **Activity Analysis of Production and Allocation**, Cowles Commission for Research in Economics, Monograph Nº 13. New York: John Wiley and Sons, Inc, (1951).
- KORNBLUTH, J. S. H. **Analysing Policy Effectiveness Using Cone Restricted Data Envelopment Analysis**. Journal of the Operational Research Society, 42, n.º12, 1097-1104, 1991.
- LINS, M.P.E.; ANGULO MEZA L. **Análise Envoltória de Dados e perspectivas de integração no ambiente do Apoio à Decisão**. COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2000
- NORMAN, M.; STOKER, B. **Data Envelopment Analysis – The Assessment of Performance**. Johs Wiley & Sons – 1991
- PEDRAJA-CHAPARRO, F.; SALINAS-JIMENEZ.; SMITH, P. **On the Role of Weight Restrictions in Data Envelopment Analysis**. Journal of Productivity Analysis, 08, 215-230, 1997.
- ROLL, Y.; GOLANY, B. **Alternate Methods of Treating Factor Weights in DEA**. International Journal of Management Science, 21, n.º01, 99-109, 1993.

- SEIFORD, L. M. **A Bibliography for Data Envelopment Analysis (1978-1996)**, Annals of Operations Research, vol.66, pp. 393-438, 1994.
- SEIFORD, L. M.; THRALL, R. M. **Recent Developments in DEA – The Mathematical Programming Approach to Frontier Analysis**. Journal of Econometrics, 46, 7-38, 1990.
- THOMPSON, R. G.; LANGEMEIER, L. N.; LEE C. H.; LEE E.; THRALL R. M. **The Role of Multiplier Bounds in Efficiency Analysis with Application to Kansas Farming**. Journal of Econometrics, 46, 93-108, 1990.
- THOMPSON, R. G.; SINGLETON, F. D.; THRALL, R. M.; SMITH, B. A. **Comparative Site Evaluations for Locating a High-Energy Physics Lab in Texas**. Interfaces, 16, n.º06, 35-49, 1986.
- WONG, y. H. B.; BEASLEY, J. E. **Restricting Weight Flexibility in Data Envelopment Analysis**. Journal of the Operational Research Society, 41, n.º 09, 829-835, 1990.

WWW.deazone.com/bibliography

PROGRAMAS COMPUTACIONAIS EMPREGADOS: O CASO DA DMU 01

Modelo BCC Seminal

max k

subject to

970am+774ms+1211mt+709pel+1070fub+670fv+343op+550rg+579scar+1066al+1952ba+1357ce+1136es+2690ff+1127go+827jf+884ma+2748mg+1826pa+2890pb+1636pe+1036pi+1829pr+3424rj+1758rn+427rpe+575rrj+2583rs+1657sc+545se+1246sm+1406unb+586rio<=970

27.30k-27.30am-46.42ms-38.61mt-41.00pel-45.48fub-59.43fv-29.42op-43.28rg-49.07scar-39.03al-57.66ba-51.83ce-61.78es-51.70ff-39.34go-58.01jf-37.32ma-61.65mg-28.86pa-37.02pb-47.86pe-40.20pi-61.64pr-68.09rj-42.80rn-24.40rpe-35.23rrj-67.08rs-50.30sc-37.53se-57.85sm-65.91unb-46.25rio<=0

754k-754am-781ms-958mt-703pel-962fub-869fv-278op-410rg-326scar-478al-1711ba-1422ce-1125es-932ff-1305go-716jf-611ma-3115mg-2348pa-1654pb-1501pe-809pi-1874pr-3732rj-1354rn-267rpe-499rrj-2088rs-1856sc-490se-1212sm-1106unb-505rio<=0

55k-55am-43ms-15mt-54pel-23fub-387fv-122op-36rg-305scar-46al-336ba-197ce-72es-88ff-85go-47jf-6ma-806mg-47pa-170pb-329pe-54pi-421pr-1202rj-70rn-34rpe-171rrj-819rs-377sc-49se-213sm-329unb-30rio<=0

am+ms+mt+pel+fub+fv+op+rg+scar+al+ba+ce+es+ff+go+jf+ma+mg+pa+pb+pe+pi+pr+rj+rn+rpe+rrj+rs+sc+se+sm+unb+rio=1

am>=0 ms>=0 mt>=0 pel>=0 fub>=0 fv>=0 op>=0 rg>=0 scar>=0 al>=0 ba>=0
ce>=0 es>=0 ff>=0 go>=0
jf>=0 ma>=0 mg>=0 pa>=0 pb>=0 pe>=0 pi>=0 pr>=0 rj>=0 rn>=0 rpe>=0 rrj>=0
rs>=0 sc>=0 se>=0 sm>=0
unb>=0 rio>=0

End

Modelo BCC básico 1ª fase

max k subject to

970.00am+774ms+1211mt+709pel+1070fub+670fv+343op+550rg+579scar+1066al+1952ba+1357ce+1136es+2690ff+1127go+827jf+884ma+2748mg+1826pa+2890pb+1636pe+1036pi+1829pr+3424rj+1758rn+427rpe+575rrj+2583rs+1657sc+545se+1246sm+1406unb+586rio+l=970

27.3k-27.30am-46.42ms-38.61mt-41.00pel-45.48fub-59.43fv-29.42op-43.28rg-49.07scar-39.03al-57.66ba-51.83ce-61.78es-51.70ff-39.34go-58.01jf-37.32ma-61.65mg-28.86pa-37.02pb-47.86pe-40.20pi-61.64pr-68.09rj-42.80rn-24.40rpe-35.23rrj-67.08rs-50.30sc-37.53se-57.85sm-65.91unb-46.25rio+S1=0

754k-754am-781ms-958mt-703pel-962fub-869fv-278op-410rg-326scar-478al-1711ba-1422ce-1125es-932ff-1305go-716jf-611ma-3115mg-2348pa-1654pb-1501pe-809pi-1874pr-3732rj-1354rn-267rpe-499rrj-2088rs-1856sc-490se-1212sm-1106unb-505rio+S2=0

55k-55am-43ms-15mt-54pel-23fub-387fv-122op-36rg-305scar-46al-336ba-197ce-72es-88ff-85go-47jf-6ma-806mg-47pa-170pb-329pe-54pi-421pr-1202rj-70rn-34rpe-171rrj-819rs-377sc-49se-213sm-329unb-30rio+S3=0

am+ms+mt+pel+fub+fv+op+rg+scar+al+ba+ce+es+ff+go+jf+ma+mg+pa+pb+pe+pi+pr+rj+rn+rpe+rrj+rs+sc+se+sm+unb+rio=1

am>=0 ms>=0 mt>=0 pel>=0 fub>=0 fv>=0 op>=0 rg>=0 scar>=0 al>=0 ba>=0 ce>=0 es>=0 ff>=0 go>=0

jf>=0 ma>=0 mg>=0 pa>=0 pb>=0 pe>=0 pi>=0 pr>=0 rj>=0 rn>=0 rpe>=0 rrj>=0 rs>=0 sc>=0 se>=0 sm>=0 unb>=0 rio>=0 S1>=0 S2>=0 S3>=0 l>=0

End

Modelo BCC Básico 2ª fase

max S1+S2+S3+l subject to

970am+774ms+1211mt+709pel+1070fub+670fv+343op+550rg+579scar+1066al+1952ba+1357ce+1136es+2690ff+1127go+827jf+884ma+2748mg+1826pa+2890pb+1636pe+1036pi+1829pr+3424rj+1758rn+427rpe+575rrj+2583rs+1657sc+545se+1246sm+1406unb+586rio+l=970

-27.30am-46.42ms-38.61mt-41.00pel-45.48fub-59.43fv-29.42op-43.28rg-49.07scar-39.03al-57.66ba-51.83ce-61.78es-51.70ff-39.34go-58.01jf-37.32ma-61.65mg-28.86pa-37.02pb-47.86pe-40.20pi-61.64pr-68.09rj-42.80rn-24.40rpe-35.23rrj-67.08rs-50.30sc-37.53se-57.85sm-65.91unb-46.25rio+S1=-45.36

-754am-781ms-958mt-703pel-962fub-869fv-278op-410rg-326scar-478al-1711ba-1422ce-1125es-932ff-1305go-716jf-611ma-3115mg-2348pa-1654pb-1501pe-809pi-1874pr-3732rj-1354rn-267rpe-499rrj-2088rs-1856sc-490se-1212sm-1106unb-505rio+S2=-1252.82

-55am-43ms-15mt-54pel-23fub-387fv-122op-36rg-305scar-46al-336ba-197ce-72es-88ff-85go-47jf-6ma-806mg-47pa-170pb-329pe-54pi-421pr-1202rj-70rn-34rpe-171rrj-819rs-377sc-49se-213sm-329unb-30rio+S3=-91.38

am+ms+mt+pel+fub+fv+op+rg+scar+al+ba+ce+es+ff+go+jf+ma+mg+pa+pb+pe+pi+pr+rj+rn+rpe+rrj+rs+sc+se+sm+unb+rio=1

am>=0 ms>=0 mt>=0 pel>=0 fub>=0 fv>=0 op>=0 rg>=0 scar>=0 al>=0 ba>=0 ce>=0 es>=0 ff>=0 go>=0 jf>=0 ma>=0 mg>=0 pa>=0 pb>=0 pe>=0 pi>=0 pr>=0 rj>=0 rn>=0 rpe>=0 rrj>=0 rs>=0 sc>=0 se>=0 sm>=0 unb>=0 rio>=0 S1>=0 S2>=0 S3>=0 l>=0

End

Modelo Dyson & Thanassoulis - 1ª fase

max k subject to

970am+774ms+1211mt+709pel+1070fub+670fv+343op+550rg+579scar+1066al+1952ba+1357ce+1136es+2690ff+1127go+827jf+884ma+2748mg+1826pa+2890pb+1636pe+1036pi+1829pr+3424rj+1758rn+427rpe+575rrj+2583rs+1657sc+545se+1246sm+1406unb+586rio+l-0.25n1+0.75r1-0.25n2+0.75r2-0.25n3+0.75r3=970

27.3k-27.30am-46.42ms-38.61mt-41.00pel-45.48fub-59.43fv-29.42op-43.28rg-49.07scar-39.03al-57.66ba-51.83ce-61.78es-51.70ff-39.34go-58.01jf-37.32ma-61.65mg-28.86pa-37.02pb-47.86pe-40.20pi-61.64pr-68.09rj-42.80rn-24.40rpe-35.23rrj-67.08rs-50.30sc-37.53se-57.85sm-65.91unb-46.25rio+S1+n1-r1=0

754k-754am-781ms-958mt-703pel-962fub-869fv-278op-410rg-326scar-478al-1711ba-1422ce-1125es-932ff-1305go-716jf-611ma-3115mg-2348pa-1654pb-1501pe-809pi-1874pr-3732rj-1354rn-267rpe-499rrj-2088rs-1856sc-490se-1212sm-1106unb-505rio+S2+n2-r2=0

55k-55am-43ms-15mt-54pel-23fub-387fv-122op-36rg-305scar-46al-336ba-197ce-72es-88ff-85go-47jf-6ma-806mg-47pa-170pb-329pe-54pi-421pr-1202rj-70rn-34rpe-171rrj-819rs-377sc-49se-213sm-329unb-30rio+S3+n3-r3=0

am>=0 ms>=0 mt>=0 pel>=0 fub>=0 fv>=0 op>=0 rg>=0 scar>=0 al>=0 ba>=0 ce>=0 es>=0 ff>=0 go>=0 jf>=0 ma>=0 mg>=0 pa>=0 pb>=0 pe>=0 pi>=0 pr>=0 rj>=0 rn>=0 rpe>=0 rrj>=0 rs>=0 sc>=0 se>=0 sm>=0 unb>=0 rio>=0

l>=0 S1>=0 S2>=0 S3>=0 n1>=0 r1>=0 n2>=0 r2>=0 n3>=0 r3>=0

End

Modelo de Dyson & Thanassoulis 2ª fase

max l+S1+S2+S3 subject to

970am+774ms+1211mt+709pel+1070fub+670fv+343op+550rg+579scar+1066al+1952ba+1357ce+1136es+2690ff+1127go+827jf+884ma+2748mg+1826pa+2890pb+1636pe+1036pi+1829pr+3424rj+1758rn+427rpe+575rrj+2583rs+1657sc+545se+1246sm+1406unb+586rio+l-0.25n1+0.75r1-0.25n2+0.75r2-0.25n3+0.75r3=970

-27.30am-46.42ms-38.61mt-41pel-45.48fub-59.43fv-29.42op-43.28rg-49.07scar-39.03al-57.66ba-51.83ce-61.78es-51.70ff-39.34go-58.01jf-37.32ma-61.65mg-28.86pa-37.02pb-47.86pe-40.20pi-61.64pr-68.09rj-42.80rn-24.40rpe-35.23rrj-67.08rs-50.30sc-37.53se-57.85sm-65.91unb-46.25rio+S1+n1-r1=-49.53

-754am-781ms-958mt-703pel-962fub-869fv-278op-410rg-326scar-478al-1711ba-1422ce-1125es-932ff-1305go-716jf-611ma-3115mg-2348pa-1654pb-1501pe-809pi-1874pr-3732rj-1354rn-267rpe-499rrj-2088rs-1856sc-490se-1212sm-1106unb-505rio+S2+n2-r2=-1368.03

-55am-43ms-15mt-54pel-23fub-387fv-122op-36rg-305scar-46al-336ba-197ce-72es-88ff-85go-47jf-6ma-806mg-47pa-170pb-329pe-54pi-421pr-1202rj-70rn-34rpe-171rrj-819rs-377sc-49se-213sm-329unb-30rio+S3+n3-r3=-99.79

am+ms+mt+pel+fub+fv+op+rg+scar+al+ba+ce+es+ff+go+jf+ma+mg+pa+pb+pe+pi+pr+rj+rn+rpe+rrj+r s +sc+se+sm+unb+rio=1

am>=0 ms>=0 mt>=0 pel>=0 fub>=0 fv>=0 op>=0 rg>=0 scar>=0 al>=0 ba>=0 ce>=0 es>=0 ff>=0 go>=0 jf>=0 ma>=0 mg>=0 pa>=0 pb>=0 pe>=0 pi>=0 pr>=0 rj>=0 rn>=0 rpe>=0 rrj>=0 rs>=0 sc>=0 se>=0 sm>=0 unb>=0 rio>=0

l>=0 S1>=0 S2>=0 S3>=0 n1>=0 r1>=0 n2>=0 r2>=0 n3>=0 r3>=0

End

Modelo Ali, Cook & seiford 1ª fase

max k subject to

970am+774ms+1211mt+709pel+1070fub+670fv+343op+550rg+579scar+1066al+1952ba+1357ce+1136es+2690ff+1127go+827jf+884ma+2748mg+1826pa+2890pb+1636pe+1036pi+1829pr+3424rj+1758rn+427rpe+575rrj+2583rs+1657sc+545se+1246sm+1406unb+586rio+l=970

27.30k-27.30am-46.42ms-38.61mt-41.00pel-45.48fub-59.43fv-29.42op-43.28rg-49.07scar-39.03al-57.66ba-51.83ce-61.78es-51.70ff-39.34go-58.01jf-37.32ma-61.65mg-28.86pa-37.02pb-47.86pe-40.20pi-61.64pr-68.09rj-42.80rn-24.40rpe-35.23rrj-67.08rs-50.30sc-37.53se-57.85sm-65.91unb-46.25rio+S1-S3=0

754k-754am-781ms-958mt-703pel-962fub-869fv-278op-410rg-326scar-478al-1711ba-1422ce-1125es-932ff-1305go-716jf-611ma-3115mg-2348pa-1654pb-1501pe-809pi-1874pr-3732rj-1354rn-267rpe-499rrj-2088rs-1856sc-490se-1212sm-1106unb-505rio+S2=0

55k-55am-43ms-15mt-54pel-23fub-387fv-122op-36rg-305scar-46al-336ba-197ce-72es-88ff-85go-47jf-6ma-806mg-47pa-170pb-329pe-54pi-421pr-1202rj-70rn-34rpe-171rrj-819rs-377sc-49se-213sm-329unb-30rio+S3-S2=0

am+ms+mt+pel+fub+fv+op+rg+scar+al+ba+ce+es+ff+go+jf+ma+mg+pa+pb+pe+pi+pr+rj+rn+rpe+rrj+r
s+sc+se+sm+unb+rio=1

am>=0 ms>=0 mt>=0 pel>=0 fub>=0 fv>=0 op>=0 rg>=0 scar>=0 al>=0 ba>=0 ce>=0 es>=0 ff>=0
go>=0 jf>=0 ma>=0 mg>=0 pa>=0 pb>=0 pe>=0 pi>=0 pr>=0 rj>=0 rn>=0 rpe>=0 rrj>=0 rs>=0
sc>=0 se>=0 sm>=0 unb>=0 rio>=0 S1>=0 S2>=0 S3>=0 l>=0

End

Modelo Ali, Cook & Seiford 2ª fase

max S1+S2+S3+l subject to

970am+774ms+1211mt+709pel+1070fub+670fv+343op+550rg+579scar+1066al+1952ba+1357ce+1136es+2690ff+1127go+827jf+884ma+2748mg+1826pa+2890pb+1636pe+1036pi+1829pr+3424rj+1758rn+427rpe+575rrj+2583rs+1657sc+545se+1246sm+1406unb+586rio+l=970

-27.30am-46.42ms-38.61mt-41.00pel-45.48fub-59.43fv-29.42op-43.28rg-49.07scar-39.03al-57.66ba-51.83ce-61.78es-51.70ff-39.34go-58.01jf-37.32ma-61.65mg-28.86pa-37.02pb-47.86pe-40.20pi-61.64pr-68.09rj-42.80rn-24.40rpe-35.23rrj-67.08rs-50.30sc-37.53se-57.85sm-65.91unb-46.25rio-S3+S1=-45.36

-754am-781ms-958mt-703pel-962fub-869fv-278op-410rg-326scar-478al-1711ba-1422ce-1125es-932ff-1305go-716jf-611ma-3115mg-2348pa-1654pb-1501pe-809pi-1874pr-3732rj-354rn-267rpe-499rrj-2088rs-1856sc-490se-1212sm-1106unb-505rio+S2=-1252.82

-55am-43ms-15mt-54pel-23fub-387fv-122op-36rg-305scar-46al-336ba-197ce-72es-88ff-85go-47jf-6ma-806mg-47pa-170pb-329pe-54pi-421pr-1202rj-70rn-34rpe-171rrj-819rs-377sc-49se-213sm-329unb-30rio-S2+S3=-91.38

am+ms+mt+pel+fub+fv+op+rg+scar+al+ba+ce+es+ff+go+jf+ma+mg+pa+pb+pe+pi+pr+rj+rn+rpe+rrj+r
s+sc+se+sm+unb+rio=1

am>=0 ms>=0 mt>=0 pel>=0 fub>=0 fv>=0 op>=0 rg>=0 scar>=0 al>=0 ba>=0 ce>=0 es>=0 ff>=0
go>=0 jf>=0 ma>=0 mg>=0 pa>=0 pb>=0 pe>=0 pi>=0 pr>=0 rj>=0 rn>=0 rpe>=0 rrj>=0 rs>=0 sc>=0
se>=0 sm>=0 unb>=0 rio>=0 S1>=0 S2>=0 S3>=0 l>=0

End

Modelo de Wong & Beasley 1ª fase

max k subject to

970am+774ms+1211mt+709pel+1070fub+670fv+343op+550urg+579scar+1066al+1952ba+1357ce+136es+2690uff+1127go+827jf+884ma+2748mg+1826pa+2890pb+1636pe+1036pi+1829pr+3424rj+1758rn+427rpe+575rrj+2583rs+1657sc+545se+1246sm+1406unb+586rio+l=970

27.3k-27.30am-46.42ms-38.61mt-41.00pel-45.48fub-59.43fv-29.42op-43.28urg-49.07scar-39.03al-57.66ba-51.83ce-61.78es-51.70uff-39.34go-58.01jf-37.32ma-61.65mg-28.86pa-37.02pb-47.86pe-40.20pi-61.64pr-68.09rj-42.80rn-24.40rpe-35.23rrj-67.08rs-50.30sc-37.53se-57.85sm-65.91unb-46.25rio+S1+26.8086n1-2.9293r1-2.659n2+24.873r2-0.1993n3+2.1622r3=0

754k-754am-781ms-958mt-703pel-962fub-869fv-278op-410urg-326scar-478al-1711ba-1422ce-1125es-932uff-1305go-716jf-611ma-3115mg-2348pa-1654pb-1501pe-809pi-1874pr-3732rj-1354rn-267rpe-499rrj-2088rs-1856sc-490se-1212sm-1106unb-505rio+S2-13.572n1+673.0958r1+680.5604n2-67.0306r2-5.5042n3+59.7168r3=0

55k-55am-43ms-15mt-54pel-23fub-387fv-122op-36urg-305scar-46al-336ba-197ce-72es-88uff-85go-47jf-6ma-806mg-47pa-170pb-329pe-54pi-421pr-1202rj-70rn-34rpe-171rrj-819rs-377sc-49se-213sm-329unb-30rio+S3-0.99n1+49.0985r1-5.357n2+50.1105r2+54.5985n3-50.644r3=0

am>=0 ms>=0 mt>=0 pel>=0 fub>=0 fv>=0 op>=0 urg>=0 scar>=0 al>=0 ba>=0 ce>=0 es>=0 uff>=0 go>=0 jf>=0 ma>=0 mg>=0 pa>=0 pb>=0 pe>=0 pi>=0 pr>=0 rj>=0 rn>=0 rpe>=0 rrj>=0 rs>=0 sc>=0 se>=0 sm>=0 unb>=0 rio>=0 l>=0 S1>=0 S2>=0 S3>=0 n1>=0 r1>=0 n2>=0 r2>=0 n3>=0 r3>=0

End

Modelo de Wong & Beasley 2ª fase

max l+S1+S2+S3 subject to

970am+774ms+1211mt+709pel+1070fub+670fv+343op+550rg+579scar+1066al+1952ba+1357ce+1136es+2690ff+1127go+827jf+884ma+2748mg+1826pa+2890pb+1636pe+1036pi+1829pr+3424rj+1758rn+427rpe+575rrj+2583rs+1657sc+545se+1246sm+1406unb+586rio+l=970

-27.30am-46.42ms-38.61mt-41.00pel-45.48fub-59.43fv-29.42op-43.28rg-49.07scar-39.03al-57.66ba-51.83ce-61.78es-51.70ff-39.34go-58.01jf-37.32ma-61.65mg-28.86pa-37.02pb-47.86pe-40.20pi-61.64pr-68.09rj-42.80rn-24.40rpe-35.23rrj-67.08rs-50.30sc-37.53se-57.85sm-65.91unb-46.25rio+S1+26.8086n1-2.9293r1-2.659n2+24.873r2-.1993n3+2.1622r3=-46.61

-754am-781ms-958mt-703pel-962fub-869fv-278op-410rg-326scar-478al-1711ba-1422ce-1125es-932ff-1305go-716jf-611ma-3115mg-2348pa-1654pb-1501pe-809pi-1874pr-3732rj-1354rn-267rpe-499rrj-2088rs-1856sc-490se-1212sm-1106unb-505rio+S2-13.572n1+673.0958r1+680.5604n2-67.0306r2-5.5042n3+59.7168r3=-1287.40

-55am-43ms-15mt-54pel-23fub-387fv-122op-36rg-305scar-46al-336ba-197ce-72es-88ff-85go-47jf-6ma-806mg-47pa-170pb-329pe-54pi-421pr-1202rj-70rn-34rpe-171rrj-819rs-377sc-49se-213sm-329unb-30rio+S3-0.99n1+49.0985r1-5.357n2+50.1105r2+54.5985n3-50.644r3=-93.90

am+ms+mt+pel+fub+fv+op+rg+scar+al+ba+ce+es+ff+go+jf+ma+mg+pa+pb+pe+pi+pr+rj+rn+rpe+rrj+r s+sc+se+sm+unb+rio=1

am>=0 ms>=0 mt>=0 pel>=0 fub>=0 fv>=0 op>=0 rg>=0 scar>=0 al>=0 ba>=0 ce>=0 es>=0 ff>=0 go>=0 jf>=0 ma>=0 mg>=0 pa>=0 pb>=0 pe>=0 pi>=0 pr>=0 rj>=0 rn>=0 rpe>=0 rrj>=0 rs>=0 sc>=0 se>=0 sm>=0 unb>=0 rio>=0

l>=0 S1>=0 S2>=0 S3>=0 n1>=0 r1>=0 n2>=0 r2>=0 n3>=0 r3>=0

End